سلسله انتشارات انجمن آثار ملی
۱۲۴

تحریر

استخراج الاوتار

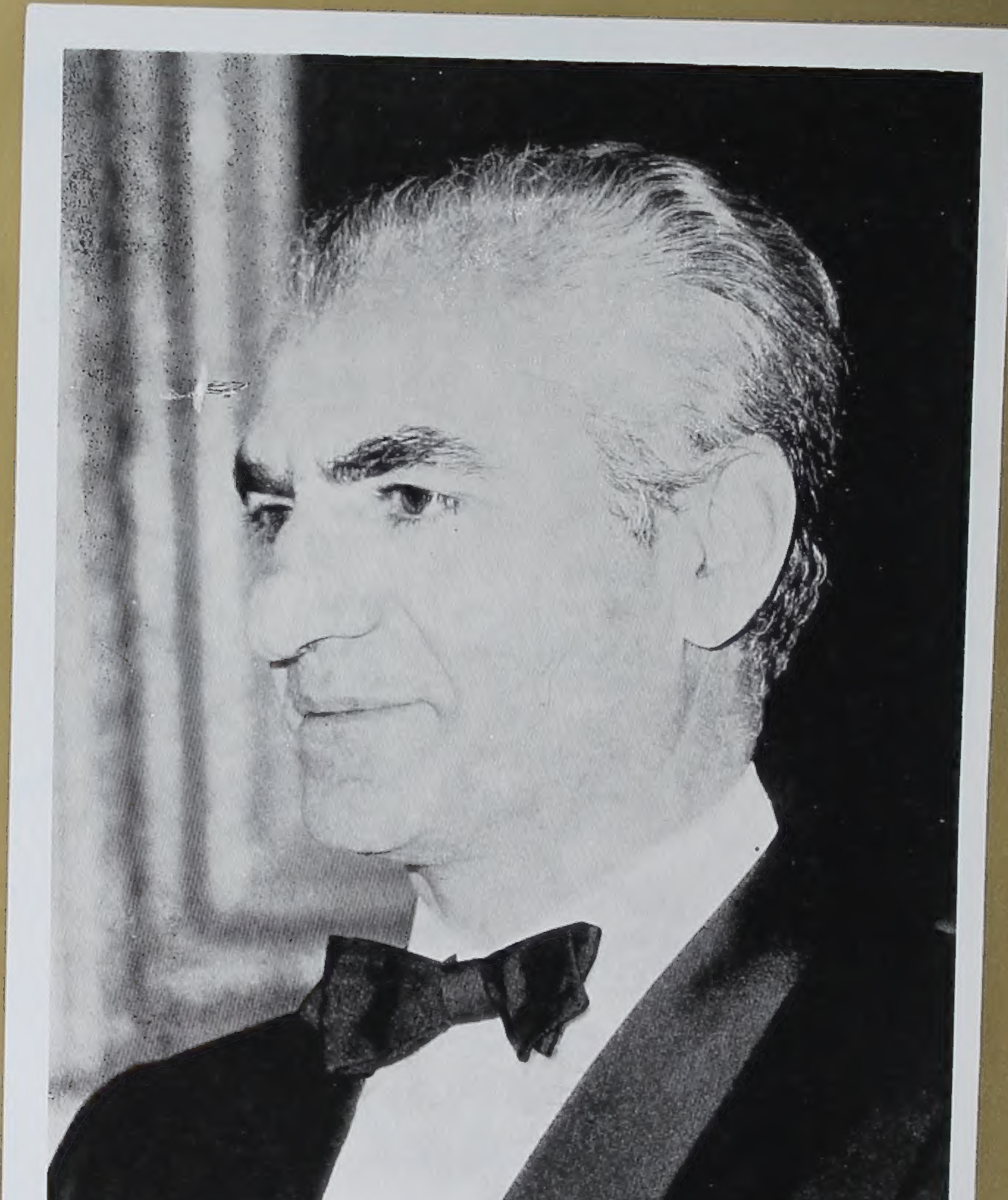
تألیف استاد ابوریحان بیرونی

ریاضیدان و منجم بزرگ ایران

از ۳۶۲ تا ۴۴۰ هجری قمری

برابر ۱۵۲۱ تا ۱۶۰۷ شاهنشاهی

پژوهش و نگارش
ابوالقاسم قربانی



سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی

۱۲۴

تحریر

استخراج الأوتار

تألیف استاد ابوریحان بیرونی

ریاضی‌دان و منجم بزرگ ایران

از ۳۶۲ تا ۴۴۰ هجری قمری

برابر ۱۵۳۱ تا ۱۶۰۷ شاهنشاهی

پژوهش و نگارش

ابوالقاسم قربانی

از این کتاب یك هزار نسخه درچاپخانه آذر بچاپ رسید

شماره ثبت کتابخانه ملی ۵۰۷ به تاریخ ۲۵۳۵/۳/۳۱

چهارمین نشریهٔ انجمن آثار ملی در سال ۲۵۳۵ شاهنشاهی

سال برگزاری جشن پنجاهمین سال شاهنشاهی پهلوی

سرآغاز

بنام پروردگار بزرگ دانا و توانا

پس از عرض سپاس فراوان بدرگاه کبریائی آفریننده جهان و جهانیان و درود بسیار پیامبر اسلام حضرت محمد مصطفی (ص) و دودمان گرامی او در پرتو عنایات کریمانه ذات خجسته اعلیحضرت همایون محمدرضا پهلوی شاهنشاه آریامهر کتاب تحریر «استخراج الاوتار» براساس یکی از مهمترین آثار ریاضی دانشمند نامی ایران ابوریحان بیرونی[1] بمعرض انتشار و استفاده علاقه‌مندان گذارده میشود.

هنگامی که بفرمان مطاع مبارک همایونی درسال ۲۵۳۲ شاهنشاهی از طرف شورای عالی فرهنگ و هنر و دانشگاههای مختلف ایران و دیگر مقامات علمی کشور نسبت به بزرگداشت نابغه بزرگ علمی ایران ابوریحان بیرونی اقدامات گوناگون صورت می‌پذیرفت انجمن آثار ملی هم

---

(۱) تولد سوم ماه ذی‌حجه سال ۳۶۲ هجری (برابر ۱۵۲۱ شاهنشاهی = ۳۵۱ هجری خورشیدی و ۹۷۲ میلادی) در بیرون شهر خوارزم — درگذشت شب دوم ماه رجب سال ۴۴۰ هجری (برابر با ۱۶۰۷ شاهنشاهی = ۴۲۷ هجری خورشیدی و ۱۰۴۸ میلادی) درغزنه (غزنین)

به پیروی از فرمان مبارک با توجه به اساسنامه و هدف همیشگی خود در راه شناساندن و بزرگداشت مفاخر و بزرگان درگذشته کشور وظائفی را بر عهده گرفت و دست بکار چاپ و انتشار کتابهائی از آن شخصیت بزرگ علمی ایران شد و تاکنون کتابهای «ترجمه یک فصل از آثار الباقیه» و «بیرونی نامه» (۲) و «التفهیم لاوائل صناعة التنجیم» (نشریه های شماره ۹۸ و ۱۰۷ و ۱۰۹) (۳) را چاپ و منتشر ساخت و اینک کتاب تحریر استخراج الأوتار را که بمنزله جلد دوم بیرونی نامه است در معرض مطالعه علاقه‌مندان و دانش‌پژوهان می‌گذارد.

در مقدمه کتاب دانشمند گرامی آقای ابوالقاسم قربانی بطور شایسته درباره اهمیت علمی و نکته های دقیق متن استخراج الاوتار توضیح داده یکبار دیگر مرتبت والای نابغه بزرگ ایران را در دانش ریاضی و هندسه به معرض بررسی اهل معنی و صاحب‌نظران قرار داده اند و معلوم کرده اند که فرزندان این مرز و بوم با بهره‌مندی از وسایل موجود و فراهم بودن موجبات خدمت در روزگار کنونی چه نیکو میتوانند در راه شناخت بیشتر و بهتر فرهنگ دیرین و ریشه دار میهن خویش گام بردارند و برای دستیابی به اندیشه ها و ثمره کارهای معنوی نیاکان خود چه مایه کوشش مداوم در پیش دارند چنانکه تنها از طرف انجمن آثار ملی ظرف سه سال نسبت به نوشته ها و آثار ابوریحان

(۲) برنده جایزه سلطنتی سال ۱۳۵۳

(۳) به فهرست انتشارات انجمن در پایان کتاب مراجعه فرمایند.

بیرونی چهارمین کتاب بشرحی که طی صفحات آینده از نظر خوانندگان ارجمند می گذرد انتشار می یابد و باز هم میتوان کتابهای بسیار دیگر ترتیب داد و بدین ترتیب از خرمن دانش گذشتگان همچون پشتوانه و رهنمون خدمات علمی آینده لایق چنین مرز و بوم گیتی افروز بهره مند شد.

امیدوار و آرزومند است که فرزندان برومند ایران در پی گیری اینگونه هدفهای شایستهٔ فرهنگی و ملی بفراخور دوران رستاخیز ایران توفیق روزافزون خدمت داشته باشند.

بهمن ۲۵۳۵

انجمن آثار ملی

فهرست مندرجات کتاب

این کتاب را به دوست دانشمندم
جناب آقای احمد آرام تقدیم می‌دارم

مقدمه

در کتاب «بیرونی نامه» که دو سال پیش توسط انجمن محترم آثار ملی طبع و منتشر گردید شرح احوال و فهرست کامل آثار ریاضی‌دان نابغهٔ بزرگ ایران استاد ابوریحان بیرونی را به رشتهٔ تحریر درآوردم و دربارهٔ چند اثر ریاضی مهم وی و از جمله کتاب «مقالید علم‌الهیئة» که یکی از شاهکارهای ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی است به بحث و تحقیق پرداختم و در ضمن معرفی کتاب «استخراج الاوتار» وعده دادم که تحقیقی را که دربارهٔ آن به عمل آورده‌ام در آیندهٔ نزدیك منتشر سازم. اینك خدای دانای توانا را سپاس می‌گذارم که مرا در انجام دادن این مهم یاری کرد و موفق گردانید که یکی دیگر از آثار ریاضی‌دانان ایرانی را به زبان فارسی در دسترس هم میهنان خود قرار دهم.

فایدهٔ این کتاب چیست ؟

کتاب «استخراج الاوتار» که استاد بیرونی آن را در هزار سال پیش از این

نوشته امروزه از چند جهت شایان دقت و جالب توجه است.

اولا برای دانش‌آموزان و دانشجویان و سایر کسانی که به علم هندسه دلبستگی دارند مطالعهٔ این کتاب سرگرمی بسیار دلپذیری است. چه استاد در این کتاب چهار قضیهٔ هندسی را مورد بحث قرار داده و برای هر یك از آنها استدلالهای متعدد و گوناگون از خود واز سایر ریاضی دانانی که در عصر وی ویا پیش ازوی می‌زیسته‌اند آورده وسپس آنها را در حل بیش از سی مسئلهٔ هندسی وجبری ونجومی به‌کار برده است. مقایسهٔ این استدلالهای متنوع با یکدیگر و روش به‌کار بردن آنها در حل مسائل گوناگون، گذشته از اینکه‌آموزنده و برای ممارست در علم هندسه بسیار مفید است، به خوانندهٔ کتاب نشان می دهد کسانی که در هزار سال پیش از این سرگرم مطالعهٔ ریاضی بوده‌اند تا چه اندازه دربارهٔ نکته‌های این علم به موشکافی می‌پرداخته وآثار قدما ومعاصران خود را مورد بحث و تحقیق قرار می‌داده‌اند وچگونه قضایای نظری را در حل مسائل عملی به‌کار می‌برده‌اند.

ثانیاً برای کسانی که به تاریخ ریاضیات دلبستگی دارند مطالعهٔ کتاب استخراج‌الاوتار از این جهت مغتنم است که استاد بیرونی، همان‌گونه که عادت او بوده، هر روش و طریقه را به نام صاحب‌آن ثبت کرده و اسامی عده‌ای از ریاضی‌دانان را در این کتاب‌آورده و ازآثار ریاضی‌آنان نام برده و استدلالهایی ازآنها برای قضایای هندسی نقل کرده است که در هیچ کتاب دیگری‌آنها را نمی توان یافت. مثلا استدلالهایی که برای حل مسائل هفتم و هشتم (صفحات ۱۸۹ تا ۲۰۳ کتاب حاضر) ازیونانیان نقل کرده هردوبدیع ویگانه برهانهایی هستند که دراین باره از دورانهای بسیار قدیم برای حل این مسائل به دست ما رسیده است. همچنین نام «سارینوس ثیبائی» وکتاب «فی‌الاصول‌الهندسیة» او را که استاد استدلالی ازآن

نقل کرده (صفحات ۶۷ تا ۶۹ کتاب حاضر) در جای دیگر جز در آثار استاد بیرونی نمی‌یابیم. ونیز استاد در کتاب «استخراج الاوتار» از کتاب «الدوائر المتماسه لارشمیدوس» گفتگو به میان آورده وحال آنکه مورخان ریاضی مغرب زمین از وجود چنین کتابی اظهار بی اطلاعی کرده‌اند (رجوع کنید به یاد داشت ذیل همین مقدمه). نمونه‌های یاد شده نشان می‌دهد که تا چه اندازه مطالعهٔ کتاب «استخراج ـ الاوتار» نیز مانند سایر آثار بیرونی از جهت تاریخ ریاضیات وروشن کردن بسیاری از نکات مبهم آن مفید می‌تواند بود .

بالاخره کتاب «استخراج الاوتار» کتابی است که به قلم یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان ایرانی نوشته شده و از زمرهٔ میراثهای گرانبهای علمی ما ایرانیان است که باید به حفظ وبزرگداشت آنها همت گماریم و آنها را از زبان عربی که از طلوع اسلام تا حدود قرن یازدهم هجری زبان علمی دورهٔ اسلامی بوده به زبان فارسی بر گردانیم تا استفادهٔ از آنها برای هم میهنانمان میسر باشد .

چگونگی تدوین کتاب حاضر

استاد ابوریحان بیرونی دو کتاب راجع به استخراج اوتار دایره به زبان عربی نوشته است که دربارهٔ نسخه‌های خطی موجود ونسخه‌های چاپی آنها و ترجمهٔ یکی از آنها به زبان آلمانی وشرح دیگری به زبان عربی در بخش اول کتاب حاضر به اندازهٔ کافی توضیح داده‌ام . اگر چه عنوان این دو کتاب با هم متفاوت است و متن آنها نیز با هم اختلافاتی دارد ولی هدف اصلی آنها محاسبهٔ و ترهای دایره بر حسب قطر آن است .چون اگر تنها به ترجمهٔ متن این کتاب به زبان فارسی اکتفا می کردم چندان سودی از آن عاید نمی گردید بر آن شدم که همهٔ مطالب مهم این

دو کتاب را از نو به وجهی مدون سازم که هم فهم آنها برای خوانندهٔ کتاب سهل و ساده باشد و هم چیزی از نکته‌های علمی و تاریخی آنها حذف نشود و علاوه بر این هر جا مورد داشته باشد بتوانم به شرح مطالب پیچیده و ذکر نکات تاریخی لازم بپردازم.

نظر به جهات فوق کتاب حاضر را که حاوی همهٔ مطالب دو کتاب مذکور هست و با اصطلاحات ریاضی کنونی نوشته شده **تحریر استخراج الاوتار** نامیده‌ام و برای آنکه مطالب متن کتاب از حواشی آن متمایز باشد در پایان هر قضیه یا مسئله توضیحاتی به عنوان «یاد داشت» افزوده‌ام که با حروف ریزتر به چاپ رسیده است و کتاب را به پنج بخش به شرح زیر تقسیم کرده‌ام:

در بخش اول دربارهٔ نسخه‌های موجود کتاب «استخراج الاوتار» و تفاوتهای مهم آنها با یکدیگر به بحث پرداخته‌ام و عکس نسخهٔ خطی متن یکی از دو کتاب «استخراج الاوتار» را که در کتابخانهٔ لیدن موجود است و تا آنجا که اطلاع دارم تا کنون به چاپ نرسیده و منتشر نشده است ضمیمهٔ این بخش قرار داده‌ام تا مورد استفادهٔ پژوهندگان قرار گیرد.

در بخش دوم، مقدمهٔ هر یك از دو نسخهٔ موجود کتاب «استخراج الاوتار» را مورد بحث قرار داده به ترجمهٔ آنها به زبان فارسی پرداخته‌ام.

در بخش سوم چهار قضیهٔ هندسی را که اساس کتابهای «استخراج الاوتار» است شرح داده استدلالهای مختلف آنها را ثبت کرده‌ام.

در بخش چهارم سی مسئله را که با استفاده از چهار قضیهٔ مذکور حل شده است نوشته‌ام و این مسائل را به دودسته تقسیم کرده‌ام. دستهٔ اول مشتمل بر مسائل هندسی و جبری و نجومی است ودستهٔ دوم مسائل مربوط به محاسبهٔ وترهای دایره است.

در بخش پنجم، پایان کتاب استخراج‌الاوتار را از روی نسخه‌های مختلف مورد بحث قرار داده‌ام.

سپاسگزاری

از انجمن محترم آثار ملی که تا کنون با انتشار دهها کتاب نفیس به معرفی آثار ادبی و علمی و هنری کشور عزیزمان پرداخته‌اند بی‌نهایت سپاسگزارم که این کتاب را نیز مانند کتاب «بیرونی نامه» تألیف این حقیر مورد توجه قرار داده آن را جزء انتشارات خود به زیور طبع آراسته‌اند و با کمال صفای عقیدت و نهایت حسن سلوك مرا در چاپ این کتاب یاری فرموده‌اند.

همچنین از اولیای محترم کتابخانهٔ لیدن که عکس نسخهٔ خطی کتاب «استخراج‌الاوتار» را در اختیار بنده گذاشته اجازهٔ چاپ آن را داده‌اند و از دوست عزیزم آقای محمد رنجی که شکلهای هندسی این کتاب را رسم کرده است ممنون و سپاسگزارم.

تهران-خردادماه ۲۵۳۵ شاهنشاهی
ابوالقاسم قربانی

یاد داشت درباره کتاب «الدوائر المتماسة»

در صفحات ۶۸ و ۶۹ کتاب حاضر وصفحهٔ ۵۱۲ کتاب «بیرونی نامه» نوشته‌ام که ابن‌ندیم در «فهرست» کتاب «الدوائر المتماسة» را به نام ارشمیدس ثبت کرده و مورخان ریاضی از وجود این کتاب اظهار بی‌اطلاعی کرده‌اند . در موقعی که چاپ متن کتاب حاضر به پایان رسیده بود متوجه شدم که کتاب « الدوائر المتماسة » تألیف ارشمیدس را ثابت‌بن قره از یونانی به عربی ترجمه کرده و متن عربی این ترجمه درسال ۱۹۴۷ میلادی توسط جمعیت دائرةالمعارف عثمانی در جزء «رسائل ابن قره» در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است . برهان اول قضیهٔ اول استخراج الاوتار» (صفحات ۶۷ تا ۶۹ کتاب حاضر) و برهان سوم قضیهٔ اول همان کتاب (صفحات ۷۰ تا ۷۲ کتاب حاضر) که از ارشمیدس است در پایان کتاب «الدوائر ـ المتماسة» آمده است .

یادداشت دربارهٔ برخی از مطالب کتاب «بیرونی نامه»

چون کتاب حاضر دنبالهٔ کتاب «بیرونی نامه» و بمنزلهٔ جلد دوم آن است بعضی از نکات مهم و تصحیحات لازم را که تنی چند از دوستان وسروران ارجمندم دربارهٔ آن کتاب متذکر شده مرا رهین منت خود فرموده‌اند در اینجا ذکر می کنم .

۱ـ در باب اطلاعاتی که در صفحات ۱۳۶ و۱۳۷ دربارهٔ اعداد تام‌آمده است باید دانست که اولا در سال ۱۹۵۷ میلادی ثابت شد که اگر عدد تام فردی وجود داشته باشد از $۱۰^{۲۱}$ کمتر نیست. ثانیاً بزرگترین عدد تام زوجی که تا کنون شناخته شده عدد $(۲^{۱۱۲۱۳} - ۱)\, ۲^{۱۱۲۱۲}$ است که دارای ۶۷۵۱ رقم است (از نامهٔ مورخ ۲۱ دیماه ۱۳۵۴ دانشمند گرامی جناب‌آقای دکتر غلامحسین مصاحب) .

۲ـ در ذیل صفحهٔ ۲۰۹ نوشته شده است : «اصم بودن عدد π در سال۱۸۸۲ توسط لیندمان (F . Lindemann) به ثبوت رسید» این مطلب باید چنین اصلاح شود : «اصم بودن عدد π در سال ۱۷۶۱ میلادی توسط لامبرت (Lambert) به ثبوت رسید ـ لیندمان در سال ۱۸۸۲ میلادی متعالی بودن عدد π را ثابت کرد و به این نحو به کوشش در حل مسئلهٔ تربیع دایره خاتمه داد (از همان نامه)

۳ـ در صفحهٔ ۲۸۳، سطر ششم، دستور گاوس اشتباه چاپ شده و صحیح آن چنین است :

$$f(n) = ۲^{(۱^{n})} + ۱$$

۴ ـ در صفحهٔ ۵۰۸ محاسبهٔ مجموع $\sum_{۰}^{۶۳} ۲^{k}$ اشتباهاً محاسبهٔ مجموع $\sum_{۱}^{۶۳} ۲^{k}$ چاپ شده و در سطر پنجم همین اشتباه تکرار شده‌است.

۵ـ مطلب سطر هفتم صفحهٔ ۵۰۸ (که چنین شروع میشود : در شمارهٔ ۵۱۳ ...) زاید است و باید حذف شود .

۶ـ دربارهٔ مطالب صفحهٔ ۵۱۲ رجوع شود به یادداشت فوق دربارهٔ کتاب «الدوائر المتماسة»

بخش اول

کتاب استخراج الاوتار و نسخه‌های موجود آن

استاد **ابوریحان بیرونی** دربارهٔ استخراج اوتار دایره، یعنی محاسبهٔ وترهای دایره برحسب قطر آن، دو کتاب باعنوانهای زیر نوشته بوده است:

الف- یکی باعنوان **مقالة فی استخراج الاوتار فی الدائره بخواص الخط المنحنی الواقع فیها** که آن را ظاهراً درسال ۴۱۸ ه.ق نوشته بوده[1] ودرهر صورت نام آن را درفهرستی که درسال ۴۲۷ ه.ق از آثارخود ترتیب داده درجزو کتابهائی آورده است که در آن تاریخ تألیف آنها را به پایان رسانیده بوده[2].

ب- و دیگری باعنوان **جمع الطرق السائره فی معرفة اوتار الدائره** که درسال ۴۲۷ ه.ق هنوز کامل نشده بوده واستاد نام آن را درفهرست مذکور درشمار

(۱)- درپایان نسخهٔ خطی «استخراج الاوتار» موجود دربانکیپور آمده است: «وفرغ ابوریحان من تصنیفه فی رجب سنة ثمانی عشرة واربعمائة».

(۲)- رجوع کنید به «آثارالباقیه» چاپ زاخاو صفحهٔ XXXXVI سطراول

آثاری که می‌خواسته بعداً آنها را کامل و پاکنویس کند ذکر کرده‌است(۱). نام این کتاب را استاد در فهرست آثار خود به‌صورت فوق آورده ولی در پایان کتاب «استخراج الاوتار» چاپ قاهره نام آن بصورت زیر آمده‌است: کتاب عملته **لحصر** الطرق السائره فی استخراج اوتار الدائره».

نسخه‌های خطی موجود کتاب استخراج الاوتار

از کتاب «استخراج الاوتار فی الدائره بخراص الخط المنحنی الواقع فیها» یك نسخهٔ خطی درمجموعهٔ شمارهٔ ۲۴۶۸ کتابخانه بانکیپور (خدابخش پاتنا) ویك نسخه درقاهره ویك نسخه در کتابخانهٔ مرادملا دراستانبول موجود است(۲) و دوبارهم به شرحی که‌خواهد آمد درحیدر آباد دکن وقاهره به چاپ رسیده‌است.

نسخهٔ خطی «عل»

یك نسخهٔ خطی دیگر از کتاب «استخراج الاوتار» باهمان عنوان «استخراج الاوتار فی الدائرة بخواص الخط منحنی...» در کتابخانهٔ لیدن به‌شمارهٔ ۱۰۱۲ موجود است که‌با نسخه‌های مذکور تفاوتهای اساسی دارد و کتابی کامل به‌نظر می‌رسد. بعداً در بارهٔ این نسخه و تفاوتهای آن با نسخه‌های دیگر کتاب «استخراج الاوتار» گفتگوخواهم کرد ونتیجه خواهم گرفت که به‌احتمال قوی این نسخه را می‌توان

---

(۱)- استاد درکتاب «آثارالباقیه» (چاپ زاخاو صفحهٔ XXXXVI) دربحثی که‌دربارهٔ طول عمرخودکرده نوشته‌است: «فکان قدفنی ولم یبق منه غیرالجرة والقصعة الالشیء واحدوهو اتمام ماعلی الیدمن النواقص و تبییض المسود فی التعالیق » و سپس نام عده‌ای ازآثار خودرا که‌هنوز ناقص بوده وازجمله نام‌کتاب «جمع الطرق السائره...» راآورده‌است.

(۲)- رجوع کنید به «بروکلمان O» ص ۱۹۷ شمارهٔ ۰۶۴

نسخه‌ای از کتاب «جمع الطرق السائره فی معرفة اوتار الدائره» دانست.

این نسخه را در تهیهٔ کتاب حاضر اساس کار قرارداده ودرمتن کتاب ازآن با علامت اختصاری «نسخهٔ **عل**» (یعنی عکس نسخهٔ موجود درلیدن) نام برده‌ام وعکس صفحات آن را در پایان همین بخش (به عنوان ضمیمهٔ بخش اول) به چاپ رسانیده‌ام و برای آنکه ارجاع به آن آسان باشد صفحات آن را از ۱ تا ۴۲ شماره گذاری کرده‌ام.

ترجمهٔ نسخهٔ خطی «عل» به زبان آلمانی

سوتر (H. Suter) محقق ودانشمند سویسی[۱] درسال ۱۹۱۱ کتاب «استخراج الاوتار» راازروی نسخهٔ خطی «عل» به زبان آلمانی ترجمه کرد وباشرح و تفسیر استادانه‌ای که بر آن نوشت منتشر ساخت[۲]. درتهیهٔ کتاب حاضر ازاین اثر **سوتر** استفادهٔ فراوان برده‌ام.

استخراج الاوتار چاپ حیدرآباد

(از این چاپ در کتاب حاضر با نشانهٔ اختصاری «چد» نام برده‌ام).

درسال ۱۹۴۸ میلادی جمعیة دائرة المعارف العثمانیة درحیدرآباد دکن کتاب «استخراج الاوتار فی الدائره...» را ازروی نسخهٔ خطی موجود در بانکیپور به وضع مغشوشی به‌چاپ رسانید. توضیح اینکه نسخهٔ خطی ۲۴۶۸ بانکیپور که کتاب «استخراج

(۱)ـ دربارهٔ احوال وآثار وی رجوع کنید به مجلهٔ ایسیس (Isis) جلد پنجم سال ۲۳-۱۹۲۲ صفحات ۴۰۹ تا ۴۱۷ (تاریخ تولد وی چهاردهم ژانویهٔ ۱۸۴۸ وتاریخ وفات وی هفدهم ماه مارس ۱۹۲۲ است).

(۲)ـ رجوع کنید به «سوتر A» در فهرست منابع کتاب حاضر.

الاوتار» جزوی از آن است مجموعه‌ای است مرکب از عده‌ای از آثار بیرونی و دیگران. ظاهراً اوراق این مجموعه پراکنده وجابه‌جاشده ودرنتیجه قسمتهایی از بعضی از کتابها ورساله‌های آن وارداوراق کتابها ورساله‌های دیگرموجود درهمان مجموعه شده است. کسانی که خواسته‌اند «استخراج الاوتار» را ازروی آن نسخه به‌چاپ برسانند به‌این‌مطلب توجه نکرده‌اند و اوراق کتاب «استخراج الاوتار» را مخلوط بااوراق‌پراکنده‌ای از «مقاله فی‌التحلیل والتقطیع» تألیف **بیرونی**(۱) و چند برگ از «مقالة فی‌ان‌لوازم‌تجزیء المقادیر...» تألیف **بیرونی**(۲) وقسمتی‌از کتاب «افرادالمقال فی‌امر الاظلال» تألیف **بیرونی**(۳) وبخشی‌از کتاب «فی‌طریق التحلیل‌والترکیب» تألیف **ابراهیم‌بن‌سنان‌بن‌ثابت**(۴) رابه‌صورتی که‌درمجموعهٔ مذکور با هم مخلوط بوده درهم و برهم به چاپ رسانیده‌اند. مدتی مدیدباحوصلهٔ فراوان صرف تمیزدادن ماهیت مطالب این اوراق چاپ شده ازیکدیگر کرده‌ام و نتیجه گرفته‌ام که :

فقط مطالبی که از صفحهٔ ۳ تا اواسط صفحهٔ ۱۰۸ کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد و سپس ازوسط صفحهٔ ۲۲۴ تا پایان صفحهٔ ۲۲۶ همان چاپ آمده مربوط به‌کتاب «استخراج‌الاوتار» تألیف بیرونی است ،

(۱)- رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحهٔ ۶۱ شمارهٔ ۲/۳۰.

(۲)- رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحهٔ ۷۰ شمارهٔ ۲/۴۱.

(۳)- رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحهٔ ۴۷ شمارهٔ ۲/۲۳:

(۴)- ازصفحهٔ ۱۳۸ تاپایان سطرچهارم ازصفحهٔ ۱۵۴ ونیزازسطرچهارم صفحهٔ ۱۸۵ تانیمی ازصفحهٔ ۲۲۰ «استخراج‌الاوتار» چاپ حیدرآباد.

دربارهٔ ابراهیم‌بن‌سنان رجوع‌کنید به «بیرونی نامه» صفحهٔ ۵۲۲

که احیاناً در بعضی ازمواضع آن افتادگی دارد ومغلوط هم به‌چاپ رسیده‌است.

بقیهٔ اوراق «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد قسمتهای پراکنده‌ای از آثار دیگراست. مثلاً ازصفحهٔ ۱۳۸ تاپایان سطرچهارم ازصفحهٔ ۱۵۴ ونیز ازسطرچهارم صفحهٔ ۱۸۵ تا نیمی از صفحهٔ ۲۲۰ همان چاپ بخشی از کتاب «فی‌طریق‌التحلیل والترکیب و سایراعمال فی‌المسائل الهندسیة» تألیف **ابراهیم‌بن‌سنان‌بن‌ثابت بن‌قره** است (رسالهٔ‌دوم از«رسائل‌ابن‌سنان» که درسال ۱۹۴۸ میلادی درحیدرآباد دکن به‌طورناقص به چاپ رسیده‌است) وغیره.

استخراج الاوتار چاپ مصر

(ازاین‌چاپ در کتاب حاضر باعلامت اختصاری «چم» نام‌برده‌ام).

درسال ۱۹۶۵ میلادی آقای **احمدسعیدالدمرداش** کتاب «استخراج‌الاوتار» را بنا به گفتهٔ خودش‌ازروی‌دونسخهٔ موجود در کتابخانهٔ بانکیپور و کتابخانهٔ مرادملا در استامبول با افزودن مطالبی به‌عنوان شرح در مصر بچاپ رسانید.

مطالبی که آقای **احمدسعیدالدمرداش** به عنوان متن کتاب «استخراج الاوتار» درچاپ خودآورده همان مطالبی‌است که درچاپ حیدرآبادآمده ، باهمان وضع آشفته و درهم و برهم ، و مخلوطی است از کتاب «استخراج‌الاوتار» ومطالب پراکنده‌ای از کتابهای دیگر که ذکرش گذشت ودراین چاپ به اختلاف نسخه‌ها جزدریك مورد اشاره نشده است.

جای‌تعجب‌است که آقای «استاد احمدسعیدالدمرداش» که بقول خود کتاب «استخراج‌الاوتار» را مورد تحقیق علمی قرار داده عبارت زیررا بدون اندك دقت از قول **بیرونی** به‌چاپ رسانیده است : «وقدکان‌لجدی ابی‌الحسن‌ثابت فی ذلك

ترکیب علی‌هذه‌الجهة[1]»، و متوجه نشده است که **ابوالحسن ثابت‌بن‌قرة** جد بیرونی نبوده است. علت این اشتباه آن است که همان‌گونه که پیش‌ازاین نوشتم اصولاً این قسمت از کتاب چاپ مصر بخشی از کتاب «فی‌طریق‌التحلیل والترکیب» تألیف **ابراهیم‌بن‌سنان‌بن‌ثابت‌بن‌قره** است و اصولاً ربطی به «استخراج‌الاوتار» تألیف بیرونی ندارد.

تفاوتهای مهم نسخه‌های چاپی «چد» و «چم» با نسخهٔ خطی «عل»

نسخهٔ خطی «عل» با آن قسمت از نسخه‌های چاپی «چد» و «چم» که مربوط به «استخراج‌الاوتار» است تفاوتهای فراوان دارد که بسیاری از آنها اساسی و بعضی جزئی است. گذشته ازاین بعضی ازاین اختلافات طوری است که نمی‌توان قبول کرد که کسی جزخود **استاد بیرونی** درآنها دست برده وتغییر داده باشد و بااطمینان می‌توان گفت که هردومتن راخود استاد دردوزمان مختلف تدوین کرده‌است. چون اگر بخواهم همهٔ این اختلافات را شرح دهم مطلب بسیار به درازا خواهد کشید این‌است که به‌عنوان نمونه به‌ذکر چندفقره ازمهمترین آنها اکتفا می کنم.

الف- چنانکه در بخش دوم شرح داده‌ام قسمتی ازمقدمهٔ نسخهٔ خطی «عل» با مقدمهٔ نسخه‌های چاپی تفاوت دارد وازدقت وموشکافی درمطالب آن چنین برمی‌آید که استاد نسخهٔ «عل» را پیش‌ازمتن نسخه‌های چاپی انشا کرده بوده‌است.

ب- پایان نسخه‌های چاپی باپایان نسخهٔ خطی «عل» نیز، چنانکه در بخش پنجم کتاب حاضر خواهیم‌دید، اختلاف بارزدارد. به‌این معنی که استاد در اولی متذکر شده است که وتر یك درجه را در کتاب خود موسوم به «تکمیل زیج حبش بالعلل و

---

(۱)- رجوع کنید به «چد» صفحهٔ ۲۸۶ سطر هشتم ازپایین صفحه.

تهذیب اعماله من‌الزلل» به‌دست آورده‌است. اما درپایان نسخهٔخطی « عل » نوشته است که همهٔ ریاضی‌دانان ازمحاسبهٔ دقیق وتر یك درجه عاجز مانده‌اند وفقط آنرا به تقریب حساب کرده‌اند. ازاین اختلاف چنین برمی‌آید که استاد درموقع تألیف نسخهٔ«عل» هنوز کتاب «تکمیل زیج‌حبش» راتألیف نکرده بوده‌است.

ج- درنسخه‌های چاپی برای حالات مختلف شکل مربوط به قضیهٔ اول بحثی شده‌است(۱) که درنسخهٔ خطی «عل» دیده نمی‌شود.

د - درنسخه‌های چاپی ابتدا چهار قضیهٔ هندسی که درواقع اساس کتاب «استخراج‌الاوتار»راتشکیل‌می‌دهند بیان‌وبرای‌هریك استدلالهای مختلف‌ذکرشده است. امادرنسخهٔ خطی«عل» فقط دوقضیهٔ‌اول‌ودوم‌ازچهارقضیهٔ‌مذکور جداگانه‌بیان وبه‌طرق مختلف ثابت‌شده ودوقضیهٔ‌سوم‌وچهارم تقریباً درضمن‌استدلالها وحل‌مسائل مورد استفاده واقع گردیده است و این مهمترین اختلاف نسخهٔ خطی « عل » با نسخه‌های چاپی است وتردیدی نمی‌توان داشت که این تغییرات را خود استاد در تألیف‌خود داده ومتن هردو نسخه بدست خود استاد انشا شده است. از بررسی ترتیب این قضایا معلوم میشود که استاد ابتدا متن نسخهٔ خطی « عل» را نوشته و چون در این متن مطالب بسیار فشرده بوده بعداً این ترتیب را به‌هم زده و قضایا را به وجهی که در نسخه‌های چاپی آمده مرتب کرده است.

ه - درنسخه‌های چاپی این نکته که می‌توان بعضی ازچهار قضیهٔ مذکور را ازسه‌قضیهٔ دیگرنتیجه گرفت جداگانه وبتفصیل بیان شده‌است(۲). درصورتی که

(۱)- رجوع کنید به «چد» صفحات ۶و۵ - «چم» صفحات ۲۳ و ۲۴.

(۲)- رجوع کنید به «چد» صفحات ۴۲تا۴۵ و ۴۸ و ۴۹ - «چم» صفحات ۸۲ تا۸۵ و ۸۹ و ۹۰.

در نسخهٔ خطی «عل» این مطلب در دنبال هریك از استدلالهای قضیهٔ دوم آمده واستاد بعضی از این استدلالها رامقدم (سابق) وبعضی دیگر را تابع (لاحق) نامیده است(۱) واین نیزیکی از اختلافهای اساسی نسخهٔ خطی «عل» بانسخه‌های چاپی است ومؤید این نظر است که متون هردونسخه را خود استاد انشا کرده است.

و- درنسخه‌های چاپی چنداستدلال برای قضایای دوم وسوم ذکرشده که در نسخهٔ خطی «عل» دیده نمی‌شود. مانند برهانهائی که در کتاب حاضر به عنوان برهانهای دهم و دوازدهم قضیهٔ دوم وبرهانهای اول و دوم قضیهٔ سوم ثبت کرده‌ام. همچنین درنسخه‌های چاپی برخی ازمسائل هست که در نسخهٔ خطی «عل» نیامده است مانندمسئله‌ای که به‌عنوان مسئلهٔ سی‌ام در کتاب حاضر نوشته‌ام وچندمسئلهٔ دیگر (۲). این مطلب نیز مؤیدآن است که استاد متن نسخه‌های چاپی را بعد ازمتن نسخهٔ خطی «عل» نوشته بوده است.

دربارهٔ نسخه‌های چاپی و نسخهٔ خطی «عل» چه میتوان گفت؟

ازمقایسهٔ نسخه‌های چاپی ونسخهٔ خطی «عل» از «استخراج الاوتار» ودقت در طرزبیان وروش تقسیم‌بندی مطالب آنها ومشاهدهٔ اختلافاتی که مختصری ازآنها را شرح دادم می‌توان نتیجه گرفت که:

اولاً نسخهٔ خطی «عل» کتابی است درحد خودکامل وافتادگی ندارد ودرسلسلهٔ مطالب آن گسیختگی دیده نمی‌شود. این نسخه با یك مقدمه شروع شده وسپس دو قضیهٔ هندسی یکی پس ازدیگری درآن مطرح گردیده وبرای هریك ازآنهاچندین

(۱)- رجوع کنید به مقدمهٔ بند «ج» ازبخش سوم کتاب حاضر.

(۲)- رجوع کنید به «چد»: صفحات ۶۹ تا ۷۱ و صفحات ۱۰۵ تا ۱۰۸ - «چم»: صفحات ۱۲۰ تا ۱۲۲ وصفحات ۱۶۱ تا ۱۶۳.

استدلال از ریاضی‌دانان مختلف ذکر شده است. آنگاه راه‌حل عده‌ای از مسائل هندسی وجبری و نجومی در آن شرح داده‌شده و بالاخره مسائل اساسی مربوط به‌استخراج اوتاردایره در آن مطرح وحل گردیده ودر پایان کتاب بحثی کلی در بارهٔ استخراج وتریك‌درجه پیش کشیده شده واستاد در آنجا متذکر شده است که همهٔ ریاضی‌دانان در محاسبهٔ وتریك درجه کوشیده‌اند ولی هیچکس آن را به تحقیق به دست نیاورده.

ثالثاً نسخه‌های چاپی شامل قسمت مهم واساسی کتاب «استخراج الاوتار» هست ولی مطالب مفصلی از کتابهای دیگر باآن مخلوط شده‌است. وروی‌هم‌رفته آن قسمت ازنسخه‌های چاپی که مربوط به «استخراج الاوتار» است مطالبش پخته‌تر ورساتر ومنظمتر ازمطالب نسخهٔ خطی «عل» است وتقریباً بااطمینان می‌توان گفت که استاد متن نسخهٔ «عل» راپیش‌ازمتن نسخه‌های چاپی تألیف وتدوین کرده بوده‌است.

ثالثاً بادر نظر گرفتن‌اینکه استادبیرونی دوکتاب در بارهٔ استخراج وترهای دایره نوشته بوده و با دقیق شدن در اختلافات اساسی که‌متن نسخه های چاپی با نسخه خطی «عل» دارد می‌توان احتمالاً نسخهٔ خطی «عل» را نسخه‌ای از کتاب «جمع‌الطرق السائره فی‌معرفة اوتارالدائره» دانست کداستاد قبلا آن را نوشته بوده و به‌قول خود، چنانکه قبلاً گفتم، می‌خواسته است در آن دست ببرد وآن را اصلاح کند.

در اینکه متن‌نسخه‌های چاپی را، پس از حذف قسمتهای الحاقی، می‌توان متن کتاب «استخراج‌الاوتار بخواص خط‌المنحنی...» دانست تردیدی‌نیست. چه‌در پایان نسخه‌های چاپی آمده‌است (۱) «وقد سلکت فی‌استخراج وترالجزء الواحد

(۱)- رجوع‌کنید به«چد» ص۲۲۶- «چم» ص ۲۸۶

فی شرحی لعلل زیج حبش طریقاً آخر. **ثم جمعت ذلك الی ماللقدماء والمحدثین فی کتاب عملته لحصر الطرق السائره فی استخراج اوتار الدائره.**

پس بدون تردید نسخه‌های چاپی مشتمل برقسمتهایی از کتاب « استخراج الاوتار بخواص الخط المنحنی...» است که استاد در آن به‌تألیف دیگر خود یعنی به کتاب «جمع الطرق السائره ...» اشاره کرده است. عبارت فوق در پایان نسخهٔ خطی «عل» دیده نمی‌شود ودر آنجا مطلب اصولا به‌نحو دیگری بیان شده‌است.

بااین‌حال برای اینکه نسخهٔ خطی «عل» را نسخهٔ متن کتاب « جمع الطرق السائره فی معرفة اوتار الدائرة » بدانیم یك اشکال باقی می‌ماند وآن این‌است که عنوان این نسخهٔ خطی «استخراج الاوتار فی الدائره بخواص...» است ونه «جمع‌ـ الطرق السائره ...». شاید این عنوان را کاتب نسخهٔ خطی «عل» نظر به‌اینکه کتاب « استخراج الاوتار فی الدائره ... » شهرت بیشتری داشته از خود افزوده باشد. والله اعلم.

کتاب حاضر چگونه فراهم آمده است؟

دراین تردید نیست که **استاد بیرونی** دو کتاب‌دربارهٔ استخراج اوتاردایره نوشته بوده است که هدف اصلی از تألیف آنها به‌دست آوردن دستورهایی برای محاسبهٔ طول وترهای دایره برحسب قطر آن بوده است. حال چه‌فرض کنیم که نسخهٔ خطی «عل» متن‌یکی ازاین دو کتاب ونسخه‌های چاپی‌متن‌یکی دیگرازآنها باشد وچه این‌دونسخهٔ مختلف رایك کتاب بدانیم وفرض کنیم که‌استاد یکی ازآنها را قبلا نوشته‌بوده وبعداً آن‌راتصحیح وتکمیل کرده ونسخهٔ دیگر رافراهم‌آورده است درهرحال می‌توان نسخه های موجود را مشتمل برقضایا و مسائلی‌دانست که

استاد دربارهٔ استخراج اوتار دایره نوشته‌است وباروی هم ریختن مطالب نسخه‌های موجود ومرتب ساختن آنهایك کتاب جامع دربارهٔ استخراج اوتاردایره، چنانکه خواستهٔ خود **استاد بیرونی** ازتألیف این کتابها بوده است ، اما به‌زبان فارسی وبا به‌کار بردن اصطلاحات متداول کنونی ، فراهم آورد وآن‌را «**تحریر کتاب استخراج الاوتار**» تألیف **ابوریحان‌بیرونی** نامید واین‌کاری است که خداوند متعال توفیق انجام‌دادن آن رانصیب این‌بندهٔ ناچیز خود فرموده است.

ضمیمهٔ بخش اول

عکس صفحات نسخهٔ خطی کتاب
« استخراج الاوتار » از روی نسخهٔ موجود
در کتابخانهٔ لیدن

كتاب استخراج الاوتار في الدايرة بخواص الخط المنحني الواقع فيها جمع ابي الريحان محمد البيروني

وقفت ايدك الله على ما استعلمتيه من العلل الداعية اياي الى التفحص عن عدة براهين
على صحيح دعوى لقدماء اليونانيين في انقسام الخط المنحني في كل قوس بالعمود النازل عليه
من منتصفها وما وجدتني عليه من الولوع به والميل الى معاودة النظر فيه حتى
نسبتني لاجله الى الاشتغال بفصول الهندسة من غير ان تشعر بحقيقة الفصول
التي هي الزيادة على الكفاية في كل شيء وانت ايدك الله لو عرفت اغراض علم الهندسة
التي هي نسب مقادير ما هو تحت الكمية بعضها الى البعض وانها هي التي يتوصل بها الى معرفة
مقدار كل شيء يحتاج اليه من مذروع ومكيل وموزون ما هو بين مركز العالم
الى اقصى محسوس فيه وعرفت ان بها نعقل الصور مجردة عن المواد وتتصور
حقيقة البرهان تصورا انطباع حتى لا يذهب على المهندس ما يذهب على كثير
من المخلصين من اصحاب المنطق وابناء الفلسفة مهما سلك فيه مسلك صناعته
ثم يرتقي بوساطة التدرب بها من المعالم الطبيعية الى المعالم الالهية التي
تمنع لغموض معانيها وصعوبة ما اخذها ودقة طرايقها وجلالة امرها
وبعد تصورها عن ان ينقاد لكل واحد اويدركها من عدل عن صناعة
البرهان وكلا ايدك الله ان يعدلني على ما ذكرت لو كنت توليت استخراج
تلك الطرق باسرها فضيعت الزمان فيما يكفي منه اليسير ولو لم يحصل منها
اخر الامر ما هو العمدة في علم الهيئة اعني استخراج الاوتار في الدايرة ونسب
مقاديرها الى مقدار القطر واجزايه المفروضة له لكن هذه الدعوى وقعت
بين يدي جماعة من فضلاء اهل هذا العلم فاجتهد كل منهم في تصحيحها و
واقامة البرهان عليها فاجتمع عندي منها ما كنت كررا لنظر فيه حبا للعلم

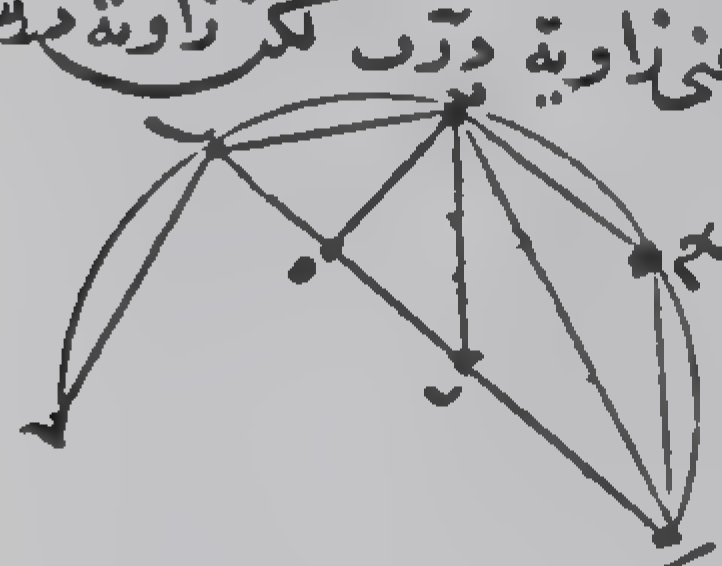
للعلم وتعليلا للفؤاد عن غليل الاشواق الى اوكيا لفضلاء ايام الغربة واعقبني
ذلك صرف الفكرة اليه حتى شاركهم في اقامة البرهان عليه على ما سيبين في خلال
الكلام وصار اصلا من الاصول الهندسية تنبني عليه جوابات كثير من المسايل
سيلتها وقد جمعت كل ذلك لك واضفت كل طريقة الى صاحبها كما هو عادتي لسطي
فيما ويعرف مآل جميعها الى النكتة الواحدة وما سنح منه اخيرا من الوصول
الى معرفة الاوتار فيتمهد عذري لديك فيما حمت حوله من عذلي ورب لايم
مليم وما التوفيق الا من عند الله العزيز الحكيم

الدعوى

اذا عطف في قوس ما من دايرة خط مستقيم على غير تساوي وانزل عليه من منتصف
تلك القوس عمود فانه يقسم بنصفين مثاله ان خط آ ب ج المنحني في قوس آ ب ج
قد انزل عليه من منتصف قوس آ ب ج عمود د ه فاقول ان خط آ ب ج المنحني قد انقسم
بنصفين اعني ان آ ه مساو لمجموع ه ب ج والله اعلم بالصواب

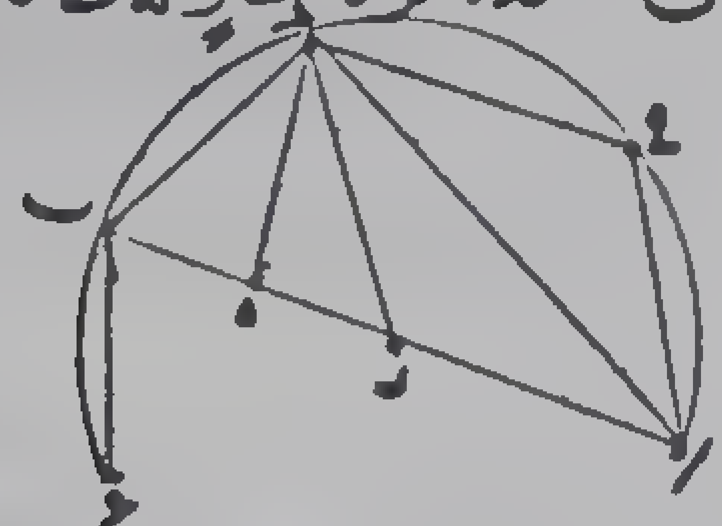
البرهان عليه لارشميدس في كتاب الدواير

لـ ـــــ نفصل قوس د ح مساوية لقوس د ب. ونصل د ج د ب ونجعل
ه ر مساويا له ه ب ونصل د ر د ا فمن اجل ان عمود د ه مشترك وزاويتا ه قائمتان
تكون خطا د ر د ب متساويان وخط د ح مساو له د ب فد ح د ر متساويان
ولان قوس د ب متساوية لقوس د ح وقوس ح ا الباقية مساوية لقوس ب ج
فان زاويتا ح د ا د ا ب مساويان لزاوية د ا ... اعني زاوية د ج ب لكن زاوية د ر ب
مساوية لزاويتي ر ا د ر د ا فزاويتا ر د ا د ا ح متساويان
و د ر مساوية له د ح و د ا مشترك فقاعدتا ا ر ا ح
متساويتان لكن آ ح مساو ب ج و آ ر مساو لـ ب ج و ر ه
مساو له ه ب فا ر مع ر ه مساو له ه ب مع ب ج وذلك ما اردنا ان نبين

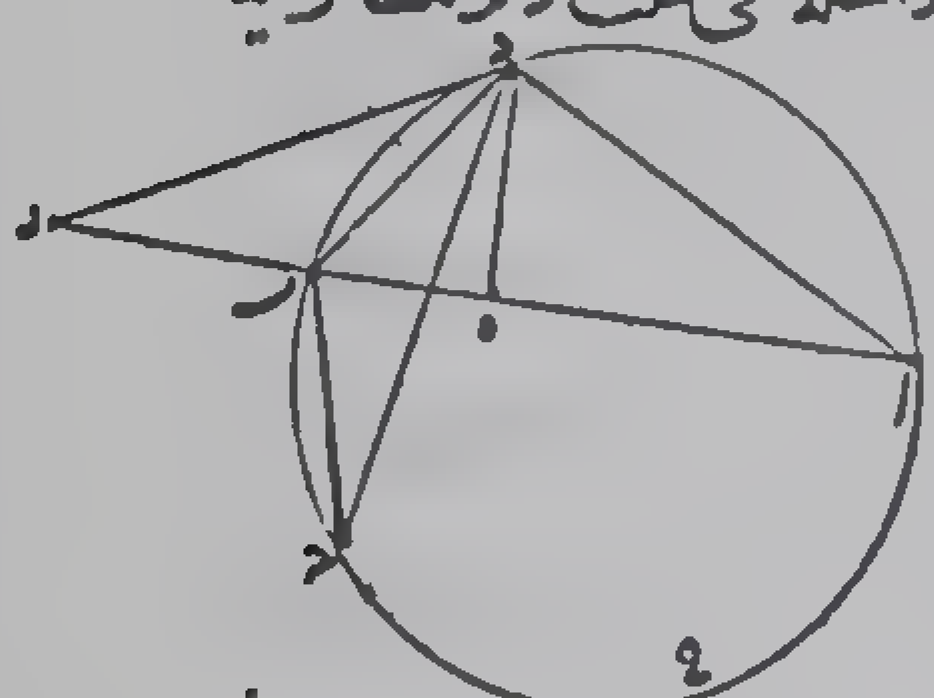


برهان لابي سعيد محمد بن علي الصيرا الجرجاني

وقد اتفق لابي سعيد الضرير برهان على ذلك شبيه بهذا الذي لارشميدس وهو ان قال
نجعل وتر اج مساويا لوتر جه ونفصل ار مساويا لاج ونصل اد در دب دج فلان
قوس اد مساوية لقوس ده وقوس اج فرضت مساوية لقوس جه فقوسا دج دب متساويتان
فزاويتا جاد دار متساويتان واج مساو لار واد مشترك فقاعدتا جد در متساويتان
لكن جد مساو لدب فدر مساو لدب وعمود ده على القاعدة فره مساو لهب فار مع ره
مساو لجه مع هب وذلك ما اردنا ان نبين ه



برهان ثان لارشميدس في كتاب الدواير
نخرج اب على استقامته ونجعل
هن مساويا لها ونصل دا دج دب دن فلان وتري اد دج متساويان
واد دن متساويان فان دن دج متساويان ومن اجل ان زاويتي داب دجب
متساويتان لكونهما على قوس واحدة وزاويتا داه دنه متساويتان فان زاويتي دنب
دجب متساويتان ومن اجل ان قوس اد مساوية لقوس دج فانا نجعل قوس اج مشتركة
فيكون قوس داج مساوية لقوس دجا لكن زاوية دجا هي على قوس داج وزاويتا داب
ادب على قوس دجا اما زاوية داب فعلى قوس دب واما زاوية ادب فعلى قوس جا
فزاوية دجا مساوية لزاويتي داب ادب لكن زاوية دبر الداخلة في مثلث دبر مساوية

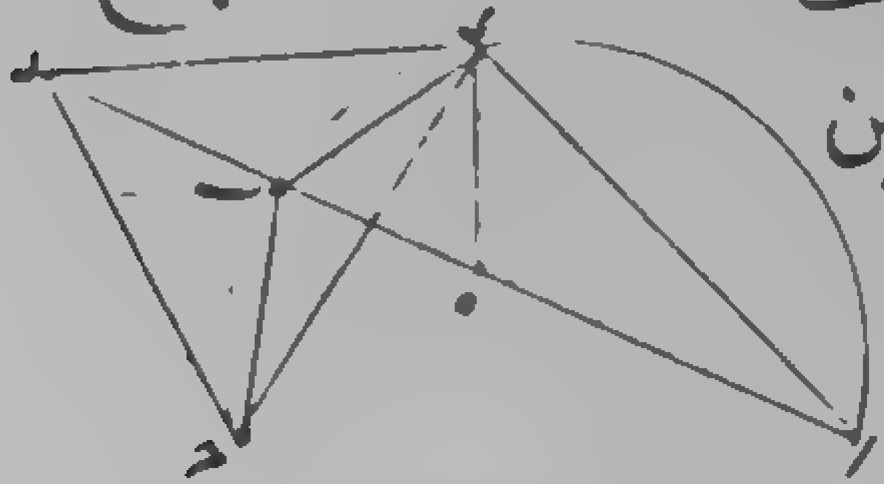


لزاويتي داب ادب اللتين تقابلانها فزاويتا دجا دبر
متساويتان وقد كان تبين ان زاويتي دنب دجب
متساويتان فتبقى زاويتا جدب ندب متساويتان
وخط دن مساو لخط دج ودب مشترك فقاعدتا
دن دج متساويتان فخطا [illegible] متساويان لخطه [illegible] وذلك ما اردنا ان نبين

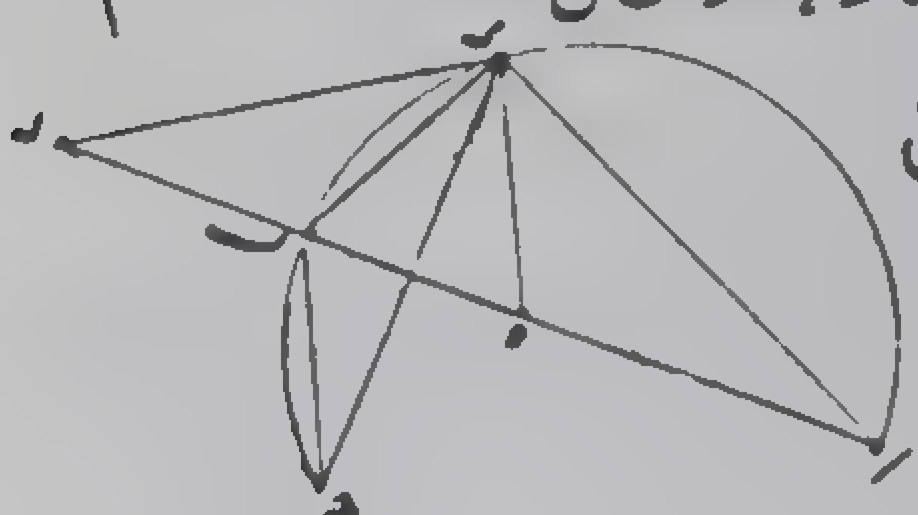
برهان لابي الحسن ادرخود ابن اشاذخشس

وله على ذلك برهان قريب مما تقدم وهو انه قال نخرج اب على استقامته ونجعل هر مساويا
له ا ونصل دا دب در دج زج فلان اه مساو لهر وده مشترك وزاويتاه قائمتان

فاتیان یکون آد مساویا لدز ولدح وزوایا داب دزب دحز متساویة ومثلث دزح
متساوی ساقی دح دز فزاویتا دحز دزح متساویتان واذا اسقطنا منهما زاویتی دحب
دزب المساویتین بقیت زاویتا بحز بزح متساویتان فخط حب مساو لب ز وبز مع بز



مساو لهما فجمع بد مساو لدا وذلک ما اردنا ان نبین
برهان ثالث لارشمیدس فی کتاب الدوایر
ووجد بعینه فی مسایل الیونانیین لا نثق ان یکون
لابلونیوس ترجمة یوحنا بن یوسف قال یخرج آر علی استقامته ویجعل
بز مساویا لدا ونصل دز دب دز فلان دح وتر فی الدایرة یکون قطعة دبح اصغر من نصف
دایرة ولیس یمکن ان یکون اعظم من نصف دایرة لان قوس آد مساویه ولیس یمکن ان یقدر
من دایرة قوسان متساویتان کل واحدة منهما اعظم من نصف الدور من غیر ان یشترک
بینهما شیء فزاویة دزح التی تقبلها منفرجة ، ومن اجل ان آد وتر فی الدایرة یکون قطعة
دحا اعظم من نصف دایرة وزاویة دبا التی تقبلها حادة وبقی زاویة دزب منفرجة وزاویتا
دزب دحب متساویتان وخطا دح دز متساویان ونسبتهما الخط دب المشترک
واحدة فثلثا دبز دبح زاویة من احدهما ومن تح مساویة لزاویة من الاخر وهی ز
الاضلاع التی تحیط بزاویتین اخراوین متناسبة وزاویتا دزب دحب کل واحدة منهما اعظم

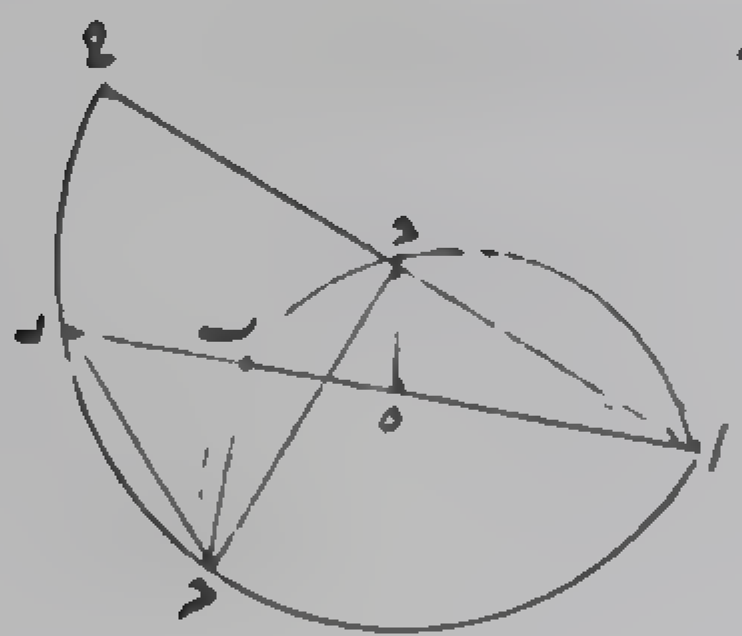


من قائمة فالزوایا الباقیة متساویة والمثلثان متشابهان
فهما متساویان وبز مساو لبح فجمع بد مساو لدا و
ذلک ما اردنا ان نبین ،

برهان ثان لابی سعید الضریر الجرجانی

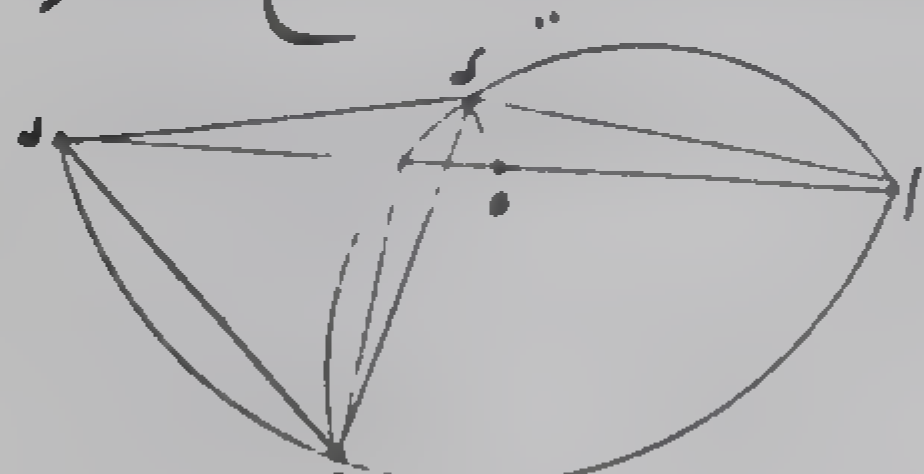
قال یخرج آد علی استقامته ویجعل دح مساویا لدا وندیر علی مرکز د وبعد دح دایرة
فتمر لا محالة بنقطتی آ ح ویکون آح قطرها ویخرج آب حتی یلقی الدایرة علی نقطة ز ونصل زح
دح فزاویتا ادح اتح متساویتان لانهما فی قطعة واحدة وزاویة ادح ضعف زاویة
ازح لانهما علی قاعدة واحدة واحدیهما علی المرکز والاخری علی المحیط فزاویة آزح ضعف

زاوية ازد وزاوية اجـ مساوية لمجموع زاويتي آدج لزجب فزاويتا زجب زجـ متساويان
وزب مساو لزجـ وهذا حكم كل خط يخرج من آ قاطعا دايرة ادب اذا وصل ما بين قطعة
اماها وبين جـ فان الخط الواصل يكون مساويا لما يقع منه بين الدايرتين ويجعل به مشتركا
فدز مساو لدب بج مجموعين ولان نقطة د مركز دايرة ازج فار و زفيها
ودة عمود عليه فاه مساو لهز وقد بين ان هز مساو لهب بج
مجموعين فاه مساو لدب بج مجموعين وذلك ما اردنا بيانه



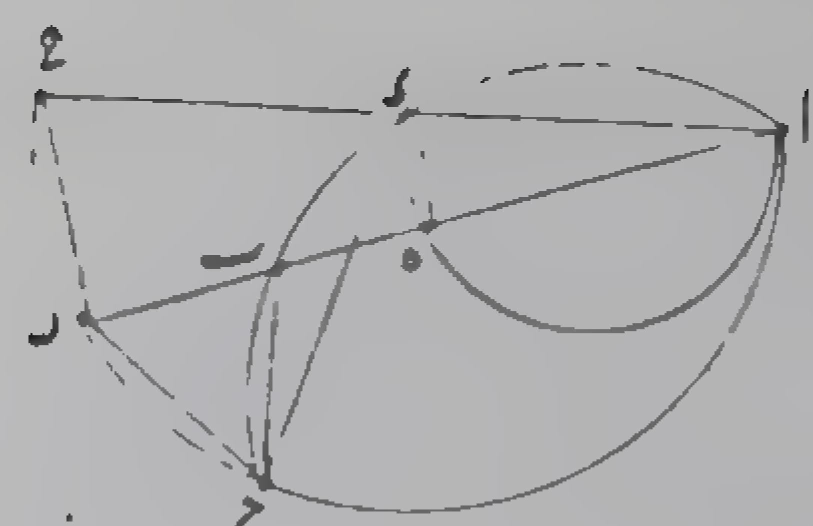
برهان لابي سعيد احمد بن محمد
بن عبد الجليل السكري

قال نخرج آب على استقامة ونجعل بز مساويا لبج ونصل دز و
زج دج فلان جب بز متساويان تكون زاويتا جزب بجز متساويتان وزاوية اجز مساوية
لهما فهي ضعف احدهما فزاوية ادج المساوية لزاوية اجب ضعف زاوية زجب فالدايرة التي تدار
على مركز د وبعد دا تمر على نقطتي ج ز لان زاويتي ادج اجب تكونان على قطعة واحدة
من تلك الدايرة فزاوية ادج على مركز الدايرة وزاوية ازج على محيطها فخطا اد دز متساويان
وزاويتا داه دزه متساويتان ودة عمود على آه فاه هز متساويان فزه مع بج مساو
لهب مع بج لكن زه مساو لها فها مساو
لمجموع هب بج وذلك ما اردنا ان نبين



برهان ثان لاحمد بن عبد الجليل السكري

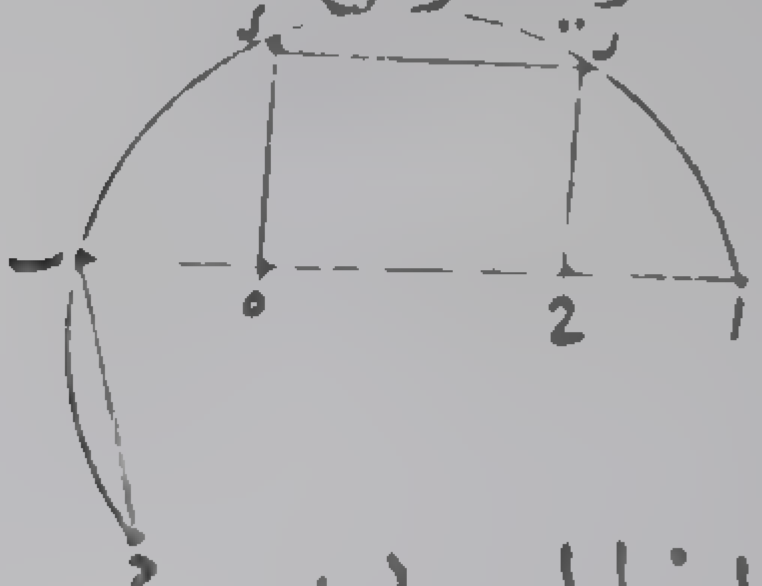
قال نرسم على اد نصف دايرة دحا ونخرج اد على استقامة ونجعل دح مساويا لدا وندير
على قطر اح نصف دايرة احا ونخرج آب على استقامة الى ز ونصل دج فلان دايرتي
اجح ادز متماستان على نقطة آ تكون نسبة اد الى دح كنسبة اه الى هز من اجل
ان زاويتي اهد اهح ثابتان ومثلثا اهد احح متشابهان فاه اذن مساو لهز و
لان زاويتي ادج اجح متساويتان وزاوية ادج على مركز دايرة احج وزاوية ازح على محيطها
تكون زاوية آح ضعف زاوية ازح فزاويتا حزر زحز متساويتان وزح مساو لزد وقد كان



کان مجموع زب ب ه مساو لة لخط ب ه مساويان
مثالة وذلك ما اردنا ان نبين والله اعلم

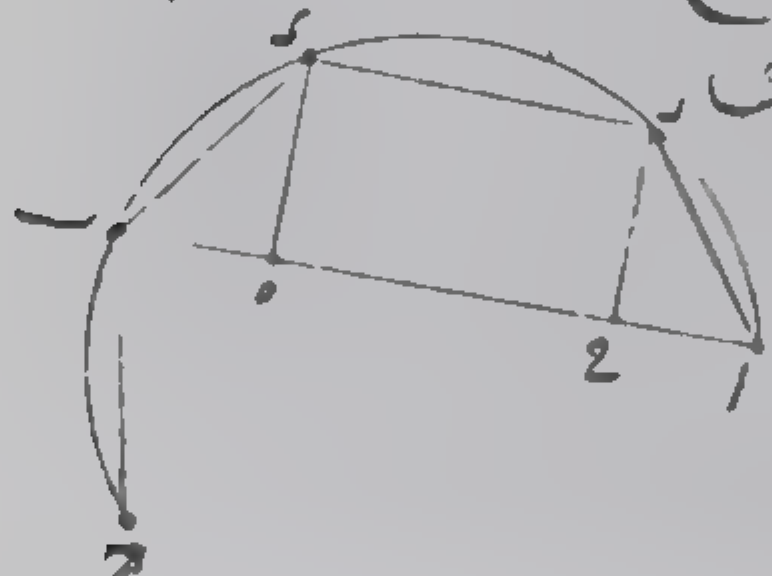
برهان ثالث لابي سعيد احمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي

قال نخرج در موازيا لاب وزح موازيا لده فقوس دب مساوية لقوس زا وبقي قوسا زد
ح مساويتان فوتر زد اعني ح ه مساو لوتر ح وخطا
اح هب مساويان واح مع ح مساو لدز
مع زح وذلك ما اردنا ان نبين



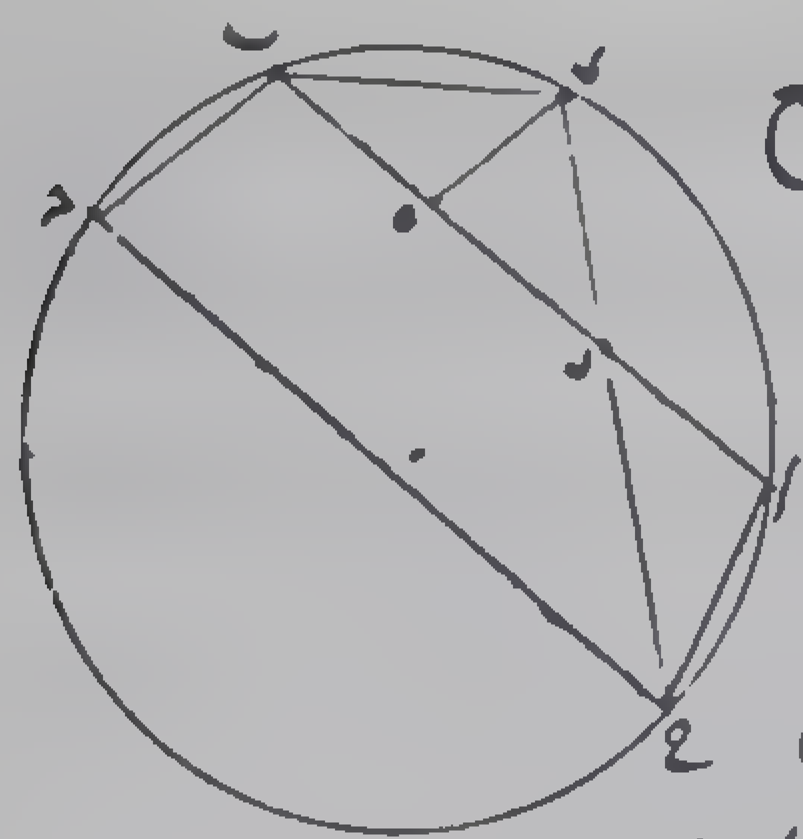
برهان للقاضي ابي علي الحسين بن الحرث الحبوبي

قال نفصل قوس از مساوية لقوس دب ونخرج عمود دح ونصل از زد دب فلان
زاويتي زحا دهب قائمتان وزاويتي زاب دبا متساويتان لكونهما على قوسي زدب
دزا المتساويتين وضلع اب مساو لضلع دب فمثلثا ازح بده متساويان واضلاعهما
متساوية النظير للنظير فزح مساو لده وهما متوازيان فزدح ه متوازيان مساويان
واح هب متساويان وزد ح متساويان لانهما وتران لقوسي
زد ح المتساويتين فح ه ح متساويان لمجموع اح ح ه
مساو لمجموع هب ح وذلك ما اردنا ان نبين



برهان ثان للقاضي ابي علي الحبوبي

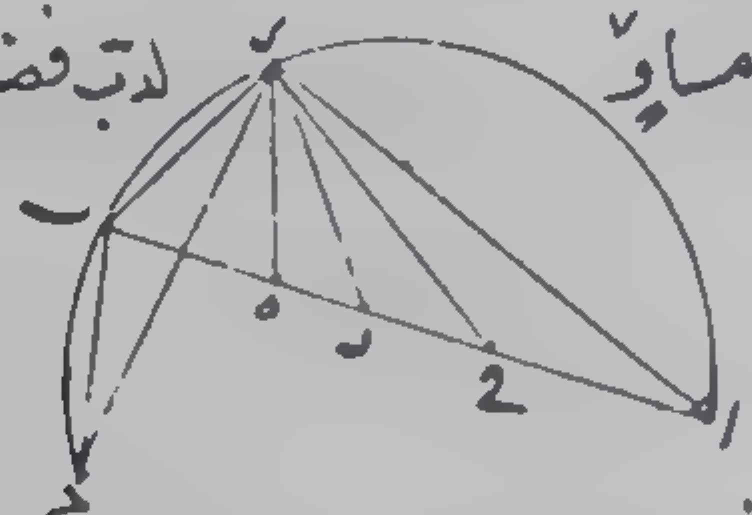
قال نفصل هر مساويا لهب ونصل دب در ونتمم دائرة اح ونخرج در على استقامته
حتى ينتهي الى المحيط على ح ونصل اح ح فلان ده هب متساويان وهد
مشترك وزاويتا ه قائمتان يكون دز مساويا لدب فزاويتا دزه دبه متساويتان
وزاويتا دزه ازح لاجل التقابل متساويتان وزاوية اح د مساوية لزاوية دب ه
لانهما على قوس واحدة فاذن زاويتا احز ازح متساويتان فاح مساو لاز وزاويتا
اح د دح متساويتان لكونهما على قوسين متساويتين فزاويتا دح ا زح متساويتان
وهما متبادلتان فخط اب مواز لخط ح د فقوسا اح ح متساويتان فوترا اح ح



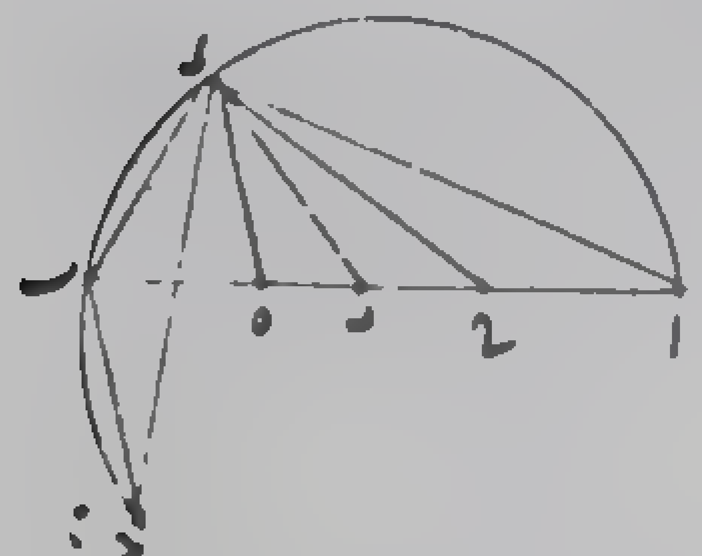
متساويان وقد كان وتر آج مساويا لازفار مساو لتم فجميع
آه مساو لمجموع هب بح وذلك ما اردنا ان نبين

برهان لابي نصر منصور بن علي بن عراق

قال نفصل من خط حا خط حز مساويا لدب
ونصل دز ونخرج وتر زه آد دح فهما متساويان لانهما على
وبين متساويتين من دائرة واحدة وزاويتا آح متساويتان لانهما على المحيط على قوس واحدة
وهي دب فخط زا لا يمكن ان يكون اعظم او اصغر من تح فان كان يمكن فليكن اولا اعظم
ونجعل آح مساويا لحب ان كان يمكن فكل خطي آح آد مساو لكل خطي حب دز وزاويتا
آب مساويتان فقاعدتا دح متساويتان لان زه مساو

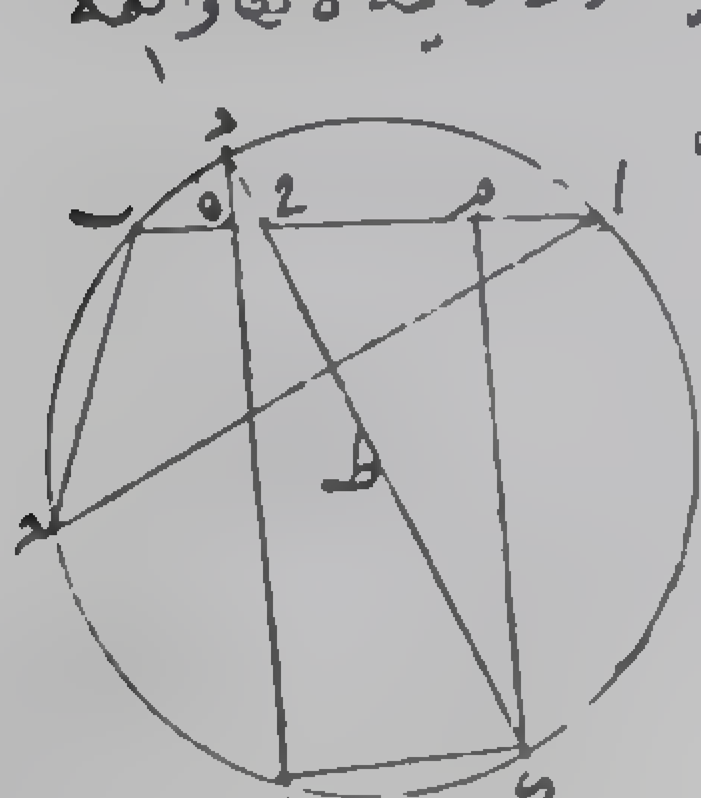


دز دح من مثلث زدح متساويان فزاويتا حز فيه
متساويتان ونصلنا تد دح ايضا متساويان فزاويتا
تح ز مثلث تدح متساويتان فزاوية زدح مساوية لزاوية دتز فالخارجة من مثلث دتز
مساوية للداخلة التي تقابلها هذا خلف وكذلك يتبين انه لا
يمكن ان يكون اصغر فزا مساو لحب وزه مساو لدب فكل آه مساو
لجميع هب بح وذلك ما اردنا ان نبين



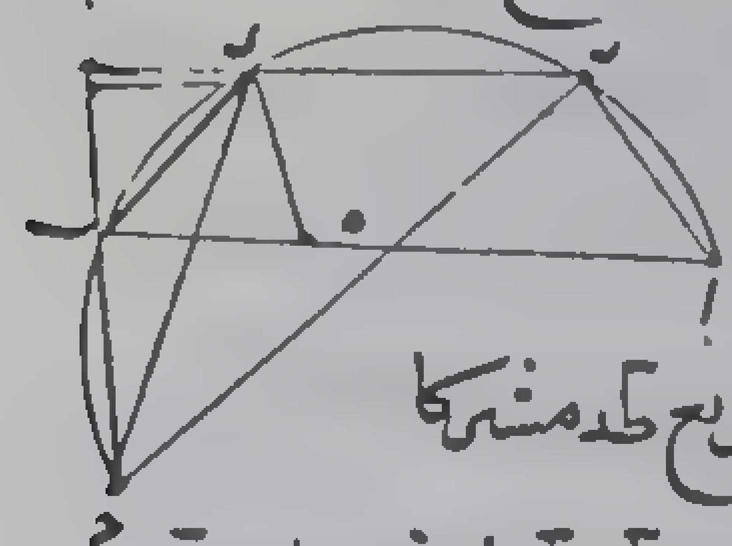
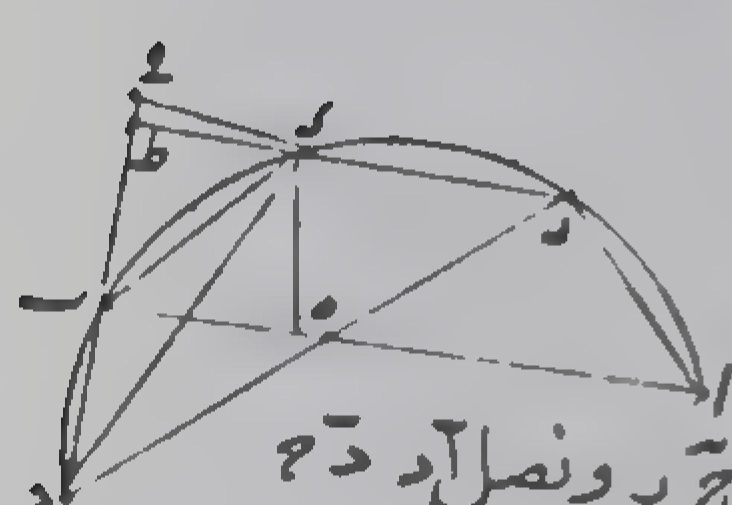
برهان لابي عبد الله محمد بن احمد السنى

قال تم الدائرة ونخرج عمود ده على استقامته الى النقطة ز من المحيط ونصل آح ونخرج قطر تح
طآك فيكون عمودا على آح ونخرج حم موازيا لدهز ونصل حز فزاويتا طاح ح زد متساويتان
لتساوي مثلثي طاح دحه فيكون وتر حز مساويا لوتر آح ولان زاوية دزح قائمة لانها واقعة
في نصف الدائرة وزاويتا زه قائمتان فسطح زم قائم الزوايا ولذلك
يكون حز مساويا لمه فمه مساويا لبح ولان عمود حم مساو
لعمود دزه يكون آم مساويا لدب وقد بينا ان مه مساو لبح
لمجموع آم مه مساو لمجموع هب بح وذلك ما اردنا ان نبين

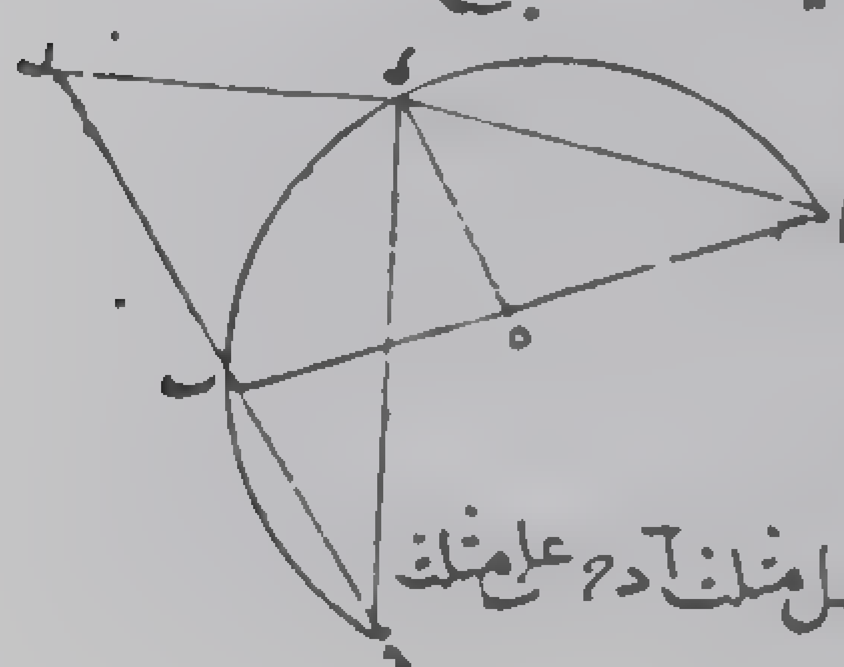


لدب وعمود هد منصف لكل قد مساو

برهان ثان لابي عبد الله الشني

قال نفصل قوس آر مساوية لقوس جب ونفصل جر ونخرج خط جب على استقامته
الى جهة ب ونجعل جح مساويا لجر ونصل دح دح دا دب در فلان خط جح مساو
لخط جر ودج مشترك وزاويتا جحد دجر متساويتان لانهما على قوسي بد در المتساويين فدح
مساو لدر لكن در مساو لدا فدح مساو لدا ونخرج عمود دط على حب فمعلوم انه نقسم خط

حد بنصفين على نقطة ط فح ب خط مستقيم قد انقسم
بنصفين على نقطة ط وزيد فيه خط جب على استقامته
فضرب حب في جب مع مربع بط مساو لمربع طج ونجعل مربع طد مشتركا
فضرب حب في جب مع مربعي بط طد اعني مربع بد مساو لمربعي طج طد اعني مربع جد
لكن با مساو لجح ودا مساو لدج فضرب اب في بج مع مربع بد اعني مربع به هد مساو
لمربع دا اعني مربعي هد ها فسقط مربع هد المشترك فبقي ضرب اب في بج مع مربع هب
مساويا لمربع ها المجموع خطي اب بج اذن منقسم بنصفين على

نقطة ه وذلك ما اردنا ان نبين

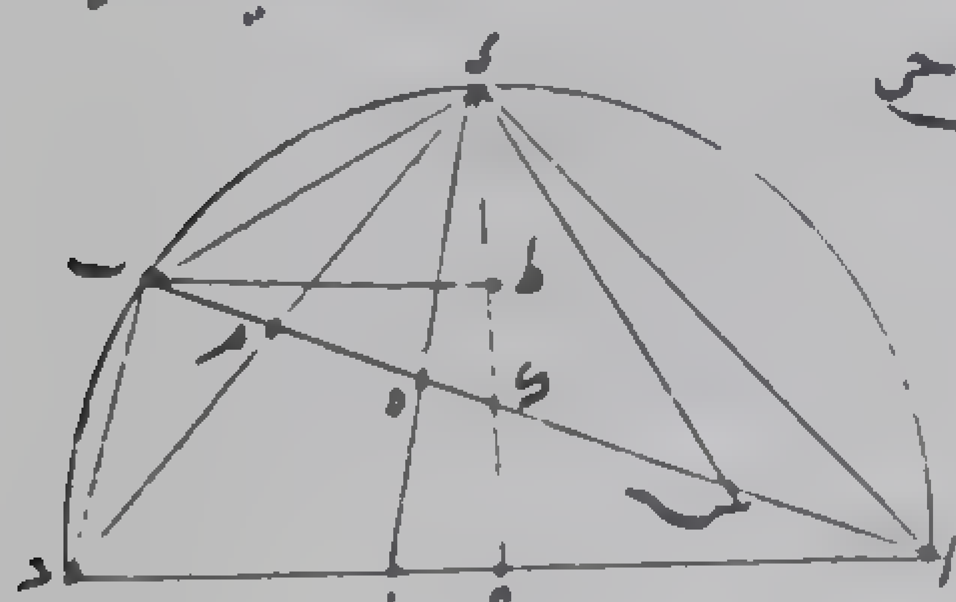
برهان ثان لابي جعفر الخازن

قال نخرج جب على استقامته ونخرج من نقطة د عمود در على جر ونصل اد دج
فلان في مثلثي درج ده ا زاويتا درج ده ا قائمتان وزاويتا رجد ه اد متساويتان لانهما
على قوس واحدة فالمثلثان متشابهان واد مساو لدج ودر مساو لده ورج مساو له ا
وبين ان مربعي در رب مساويان لمربعي ده هب اما مربع در فمساو لمربع ده لتساوي الخطين
فبقي مربع رب مساويا لمربع ب ه فهما ايضا في الطول متساويان وقد كان جميع جر مساويا لا ه

فخطا جب بر المساوي مجموعهما لخط جر مساويان لخط
ها وذلك ما اردنا بيانه والله اعلم واحكم

برهان ثالث لابي عبد الله الشني

قال نصل اج وبين ان ضرب ده في جب مساو لفضل مثلث ادج على مثلث

آج وذلك انا نخرج عمود ده على استقامته الى نقطة ز من قاعدة آج وعمود اذح على آج ونخرج
على دح ونعلم على تقاطع خطى تح آب نقطة ط فلان مثلثى هار طاح متشابهان فزاويتا زه ح
منهما متساويتان وزاوية دار مساوية لزاوية دبح لانهما يوتران نصف قوس آج فمثلثا دار دبح
متشابهان فنسبة آر الى زد كنسبة بح الى حد ونسبة آر الى زر كنسبة آح الى حد وكنسبة
آح الى هد لتشابه المثلثات ونسبة تح الى حد لذلك ايضا كنسبة بد الى زد فنسبة آح الى هد
كنسبة ده الى هد فضرب آح في دط كضرب ده في هب وضرب آح في ح ط هو فضل ضرب دح
في تح على ضرب طح في تج وذلك مثل فضل مثلث ادح على مثلث آج فضرب ده في هب مساو لفضل
مثلث ادح على مثلث آج ونجعل هس مساويا له تب ونصل دس ثم نسقط آح المشترك فيبقى فضل
مثلث ادم على مثلث تم ح هو ضرب ده في هب اعني مثلث دتب ولذلك يكون فضل مثلث ادم
على مثلث دح هو مثلث دتم فمثلثا ادس اذن مساو لمثلث دح وضلعا اد دس مساويان لضلعي
جد دب فضلع آس لذلك مساو لضلع جح لذلك من الاصل

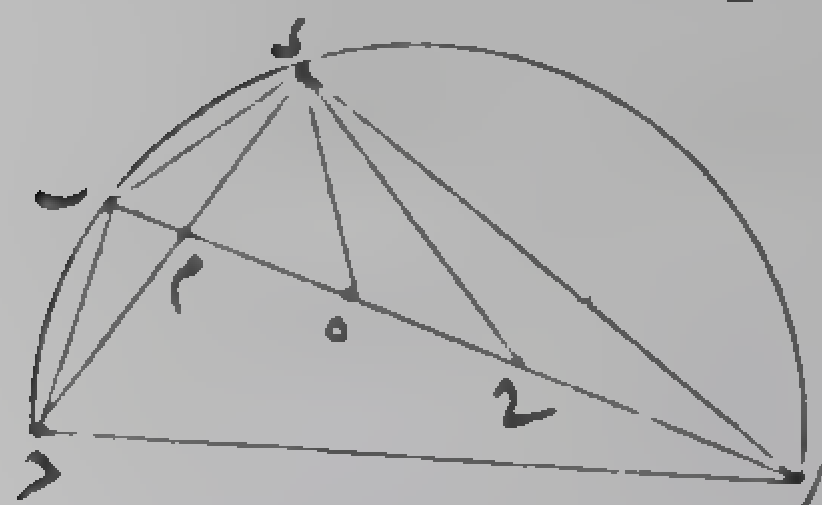


وقد كنا فرضناه مساويا لدب فاه مساو لمجموع هب
جح وذلك ما اردنا ان نبين
ويجوز ان نعكس الامر فيبرهن مساواة فضل ما بين
مثلثي ادح آح ضرب ده في هب من صفة الخط المنحني بالعمود وذلك انا اذا جعلنا هس مساويا
لهب ووصلنا دس دب كانا متساويين ومن قبل ان آه مساو لمجموع هب جح يكون آس مساويا
لجح فكلا اد آس من مثلث ادس مثل كلا دح جب من مثلث دج وزاويتا آج منهما متساويتان
وضلعا دس دب متساويان فمثلثا داس دج متساويان ففضل مثلث داس على مثلث تح
هو مثلث دمب يكون فضل مثلث ادم على مثلث تح هو مثلث دتب ومثلث دتب هو مساو
لضرب ده في هب لكن فضل مثلث ادم على مثلث تح هو فضل مثلث ادح على مثلث آج ففضل
مثلث ادح على مثلث آج هو ضرب ده في هب وذلك ما اردنا ان نبين

برهان رابع لابي عبد الله الشني

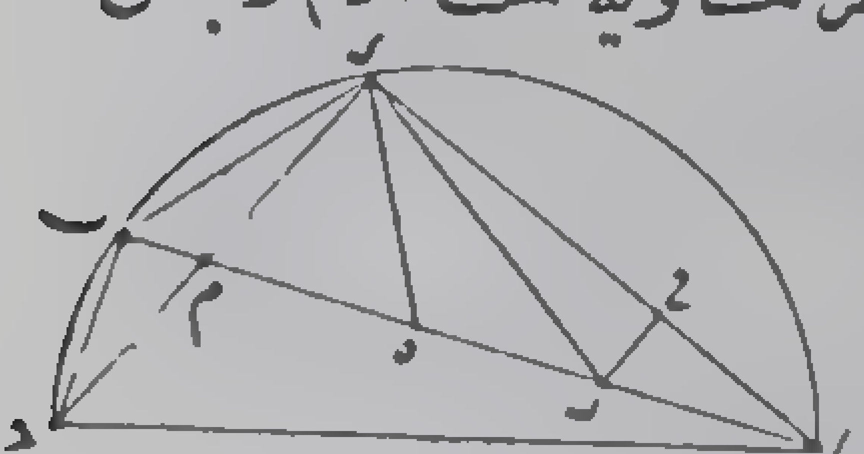
قال اذا فصل هج مساويا لهب ونصل دح دب دا دج جا فبين ان دح دب يكونان متساويين

مساوين فثلثا ادح دحب المساويا الساقين زاويتا ح ب فيهما متساويتان لانهما على قوس
واحدة فهما متشابهان فزاويتا ادح ح د ب اذن متساويتان ونسقط زاوية ح د م المشتركة
فتبقى زاويتا ا د ح ح د ب متساويتان وضلعا د ا ا ح من مثلث د ا ح مساويان لضلعي ح د
د ب من مثلث ح د ب والزاويتان اللتان يحيطان بهما متساويتان
فقاعدة ا ح مساوية لقاعدة ح ب فيكون ا ح ح
مساويا لا ب ب ه وذلك ما اردنا ان نبين



برهان ثان لابي نصر منصور بن علي بن عراق

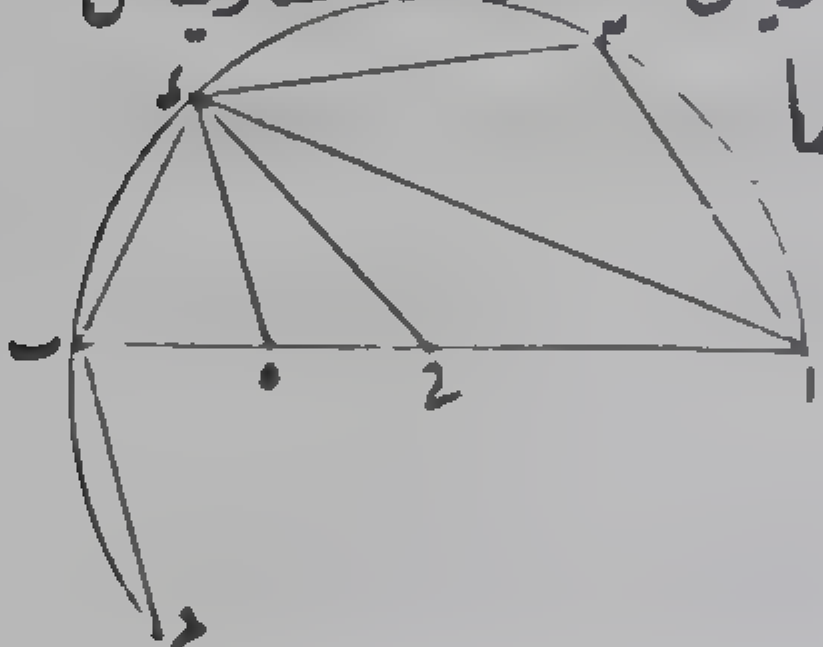
قال نخرج ا د مساويا لـ ح ه ونصل ه د ه ب فخطا د ا د ه مساويان لخطي ه ح ح ب وزاويتا
د ا ب د ح ب متساويتان لانهما على قوس واحدة فقاعدتا د ه د ب متساويتان فمثلث د ه ب
متساوي ساقي د ه د ب فعمود د ر يقسم قاعدة ه ب بنصفين على ر فـ ه ر ر ب متساويان و ا د
ح ه مساويان لمجموع ا ر ر ه مساو لمجموع ه ب ح ه وذلك ما اردنا ان نبين
فان اردنا المعنى الاخر وهو الا بانه مساواة ضرب د ه في ه ب اعني مثلث د ر ب فضل ما بين
مثلثي ا د ح ا ح فانا نفرض ا ح مساويا لـ ح ه ونصل ر ب فيكون مثلثا ا ح د ح م ب متساويان
ويبقى مثلثا د ح ر د م ب متساويان لمثلثات ح ه م د م مساوية لمثلث ا د م ونجعل
مثلث ا ح مشتركا فيكون مثلثا ا د م ا ح مساويان لمثلثات ا ح
ح ه م د م فيفصل ما بين مثلثي ا د ح ا ح هو مثلثا ه م
د م ومجموعهما يساوي ضرب د ه في ه ب وذلك ما



اردنا ان نبين   برهان لابي علي الحسن بن الحسين البصري

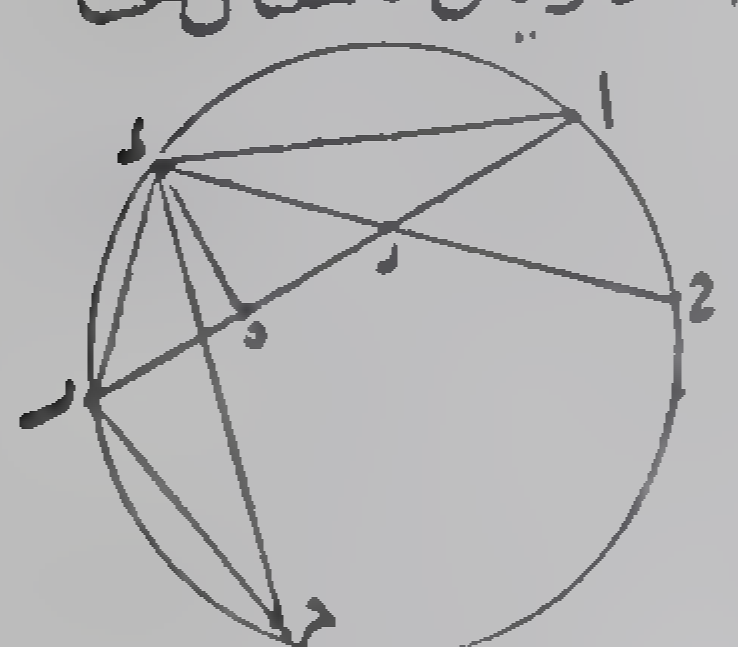
قال نفصل قوس د ر مساوية لقوس د ب ونصل د ب د ر ر ا د ا ونجعل ح ح مساويا لـ ه ب
ونصل د ح فلان قوس ح ر مساوية لقوس ح ب تكون زاوية ح ا د مساوية لزاوية د ا ب و
لان قوس د ب مساوية لقوس د ح تكون زاوية د ه ر مساوية لزاوية د ح ر ولان شكل
ا د ر ا د ذا اربعة اضلاع في دائرة تكون زاويتا ا ر د ا د ه مساويتان لقائمتين د ه ر ان
زاوية ا ه د مساوية لزاوية د ح ر وزاويتا ا ر د د ح ه مساويتان لقائمتين وتكون زاويتا

وح ب دح اساويتان لقائمتين فزاويتا ارد احد متساويتان وقد كانت زاويتا راد
حاد متساويتان وخط اد مشترك فمثلثا ارد اجد متساويان واضلاعهما مساوية كل
واحد لنظيره فرا مساو لاج لكن اد مساو لاب لان قوسيهما
متساويتان فاح مساو لكه وحه مساو لدب فاه مساو
لمجموع هب وذلك ما اردنا ان نبين



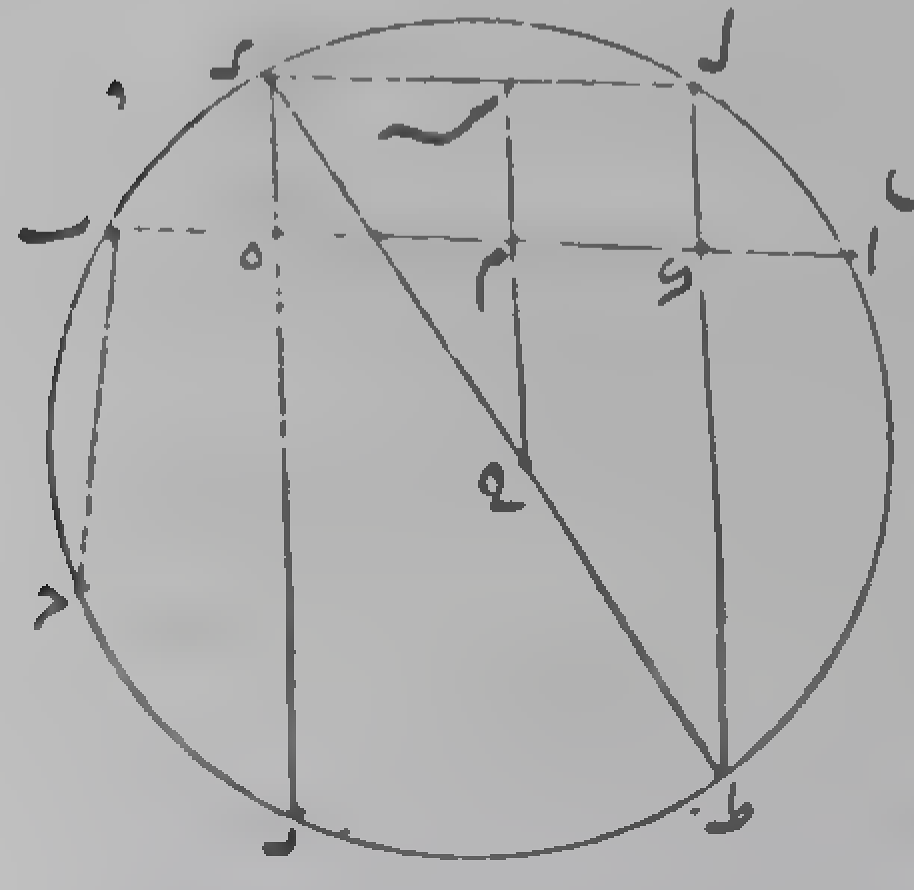
برهان لي على ذلك

فلنتمم الدائرة ونصل دب دح دا ونجعل دز مساويا لدب ونصل دز ونخرجه على استقامته
حتى يلقى المحيط على نقطة ح فلان اد دح متساويان لانهما وترا قوسين متساويين ودب
دز متساويان لتساوي مثلثي دب [illegible] دزه وزاويتا جدب ازد مساويتان لانهما على المحيط
مركبتان على قوس واحدة وزاويتا ندح زدا متساويتان من اجل ان زاوية دزب
مساوية لزاويتي زدا زاد لكن زاويتي دزب دبز متساويتان وزاوية دبز مساوية
لزاويتي دزا زاد وزاوية دبز مركبة على نصف القوس المعطاة وزاوية زاد قوس دب
من النصف الباقي فبقي زاوية زدا بمقدار تمام قوس دب الى النصف المعطى وهو دح لكن زاوية
زدا على قوس اح فقوسا اح دح متساويتان وزاويتا ندح زدا متساويتان فالمثلثان متساويان
متساويان فرا مساو لكه وزه مساو لدب فمجموع ار زد مساو
لمجموع هب دح وذلك ما اردنا ان نبين



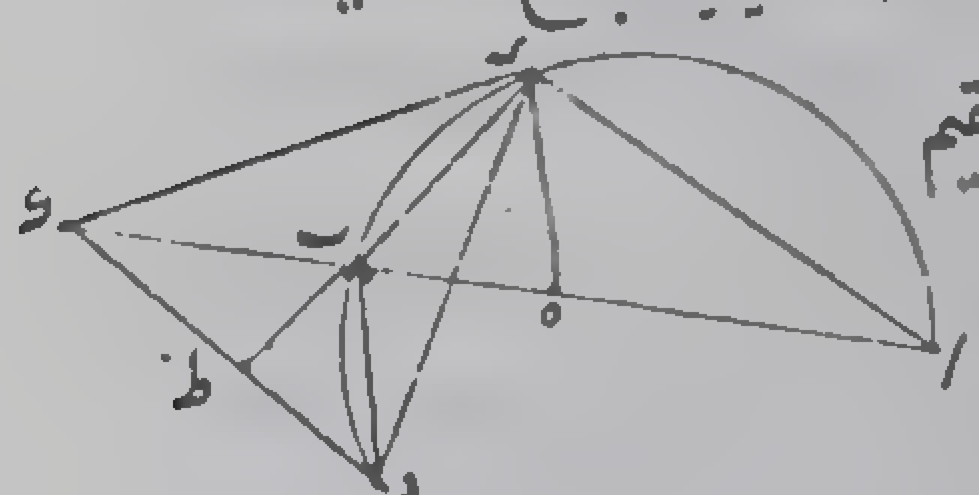
برهان ثان لي على ذلك

فلنتمم الدائرة ونخرج عمود ده على استقامته الى المحيط
ونخرج قطر دح ط ونخط طك ل موازيا لده فلان زدر طل متوازيان وخارجان
من طرفي قطر دط يكون قوسا دح در طل متساويتان ونصل لد فيكون زاوية دلط قائمة
لانها في نصف الدائرة وزاويتا لده دهك قائمتان فسطح لك قائم الزوايا متوازي
الاضلاع فلد مساو لكه ونخرج من كرح خط حس موازيا لده فسنقطع
كل واحد من وتري اب لد على زوايا قائمة وموازين بنقطتيهما بنصفين نصفين لكن مساو

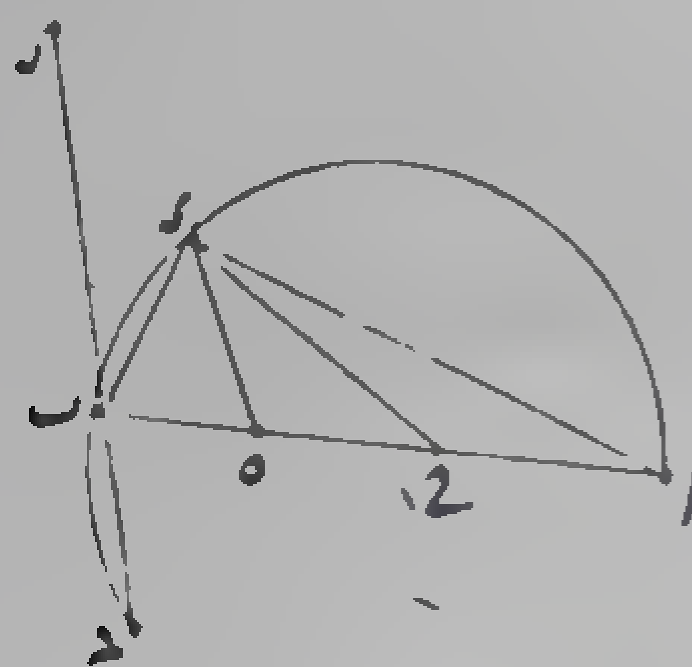


مساو لسد وکـه مساو لمه فبقی آد مساویا لهت وکذا المساوي
لکد مساو لکه فلکد مع کـه مساو لهـ مع کح وذلک ما
اردنا ان نبین   تمت البرهان الثانی ـــلی
برهان ثالث لي علی ذلک في کتا ی ـــی
المسایل المفیدة والجوابات السدیده

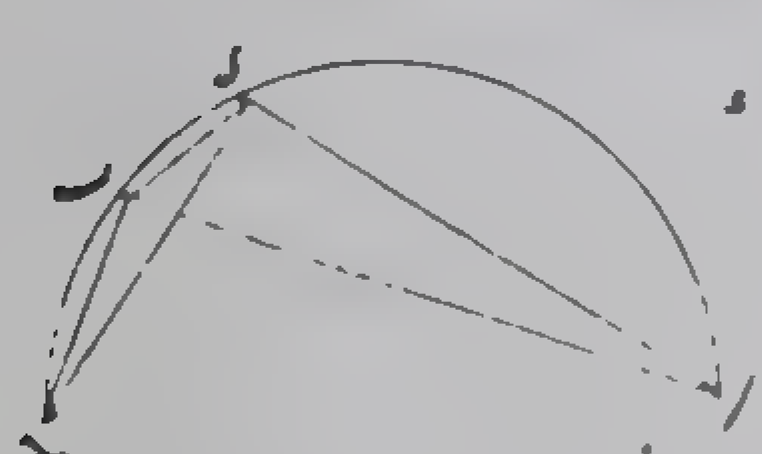
فلت نخرج اب علی استقامته ونجعل بد مساویا لبح ونصل حد دکـ دا وننزل عمود بط
علی حد فهو ینصف قاعدة ـــه لتساوي ساقی حب دب ونصیر زوایا مثلث طحب مساویة
لزوایا مثلث طدب کل لواحد. تنظیرتها فلان زاویة ات ط الخارجة من مثلث طحب مساویة
لزاویتی ب ط د ب د ه الداخلتین اللتین تقابلانها ولمثل ذلک زاویة دط الخارجة من مثلث
دطح تساوي زاویتی بحط ح تط الداخلتین لکن زاویتی لحط بـکـط مساویتان وزاویتا
تطح بـکـط متساویتان فزاویتا اتط دط مساویتان ومجموع زاویتات طـطـکـ مساو
لمجموع زاویتی دط حـط الا ان مجموع زاویتات ط طـکـ معادل لقائمتین فمجموع زاویتی



دط حـط ایضا معادل لقائمتین فخط دبط خط واحد مستقیم
وهو ح یخ عمود دکـ وقاسم قاعدته بنصفین فخطا دح دکـ
مساویان وخط دا دح متساویان فاد تساوي دکـ فعمود
ده ینصف آکـ فاه مساو لهب تـکـ لکن تبکـ فرض مساویا لبح فاه اذن تساوي
هب بح وذلک ما اردنا ان نبین   برهان رابع لي استعملته فی علل زیج حاش
فلت نفصل هح مساویا لهب ونصل دح دب فیکون مثلثا دهب دهح الفائمتی زاویتی ه
متساویان ودب مساویا لدح ثم نصل اد دح ونخرج حب علی استقامته الی ت فلان زاویة
دح علی قوس داح تکون تمامها الی القائمتین وهو زاویة دبت بمقدار قوس دح المساویة
لقوس د التی علیها زاویة دبا فزوایا دبا دبر دحه متساویة وسوی زاویتا دح دحا
متساویتان وزاویتا داب دحب علی قوس واحدة فبقی زاویتا ادح بدح متساویتان ودح
مساو لدب فمثلثا ادح دح مع تشابههما متساویان فاح مساو لبح وقد کان فرض هح مساویا

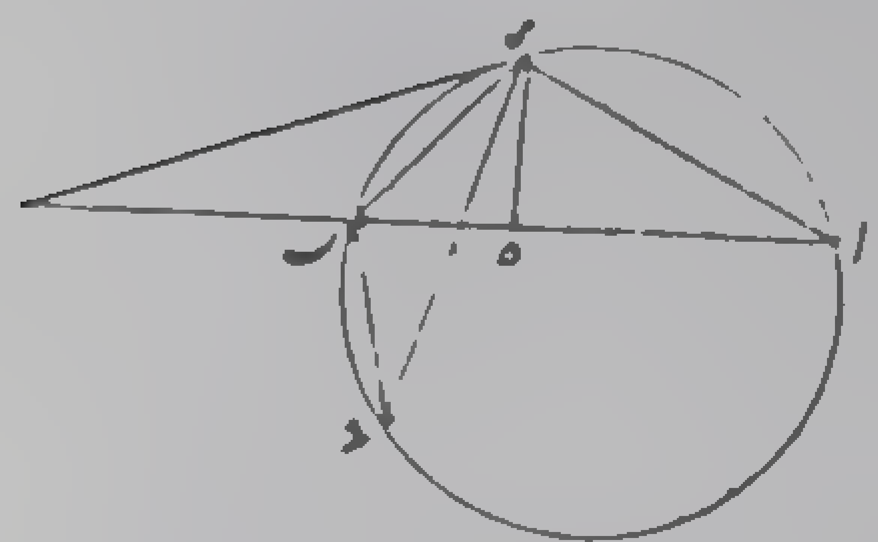


مساوياً لمجموع اح جه مساو لمجموع ﻫ ت ته فنقطة ة اذن
على منصف خط آح المنحني وذلك ما اردنا ان نبين ٥
وقد تبين من هذا انه اذا كان وتر قوس قاعدة لمثلثين فيها
احدهما متساوي الساقين والآخر مختلفهما ان احاطة الاول اعظم من احاطة الثاني لانا
اذا وصلنا آح كان قاعدة مثلث ا ب ح المساوي الساقين وا ت ح المختلفهما و آب اعظم من آه فدآح
ايضا اعظم من مجموع هب بح ويجعل آح مشتركا لمجموع آد دح آح اعظم من مجموع آه هح آح
فاضلاع مثلث ادح مجموعة اعظم من اضلاع مثلث آهح وذلك ما اردنا
فهذا ما كان اجتمع عندي من طرق الفضلاء في اقامة البرهان على صحة هذه الدعوى
ولليونانيين دعوى اخرى قد قام هؤلاء المبرزون والصالحة براهين على صحتها منها
ما اضطر الى تقديم خاصية الخط المنحني في القوس فصار لذلك من توابعها ومنها ما استغنى
عن تقديم تلك الخاصية فلما انعكست وامكن فيها تصحيح تلك الدعوى الاولى صارت لذلك من
مقدماتها واذا انتهينا الى ذلك عند تعديد ما لهم من البراهين اتبعناها وميزنا بين المقدمة
والتابعة وهذه هي الدعوى الاخرى اذا انحنى في قوس من دائرة خط فقسم القوس
نصفين وانحنى في تلك القوس ايضا خط آخر فقسمها بقسمين مختلفين فان ضرب احد قسمي الخط
المنصف للقوس في الآخر يساوي ضرب احد قسمي الخط القاسم للقوس بقسمين مختلفين في الآخر
مع مربع ما بين نقطتي انقسام القوس بهما مثال ذلك قوس آح قد انحنى فيها خط آبح
فقسم القوس بنصفين على ب وانحنى فيها ايضا خط ادح فقسمها بقسمين مختلفين على ت
اقول ان ضرب آب في بح يساوي ضرب آد في دح مع مربع دب وكل واحد من هؤلاء قد خفف
نقل هذه المؤامرة وقد ربطوها فخرجت على هيئات مختلفة كما سا
حكيها عنهم ان شاء الله تعالى



برهان عليها وجدته في المسائل التي ترجمها يوحنا بن
يوسف من اليوناني الى العربي واتفق مثله بعينه لابي سعيد السجزي وابي علي البصري بطريقة
واحدة ليكن مثلث متساوي الساقين يخرج فيه خط من الزاوية الى القاعدة يقسمها

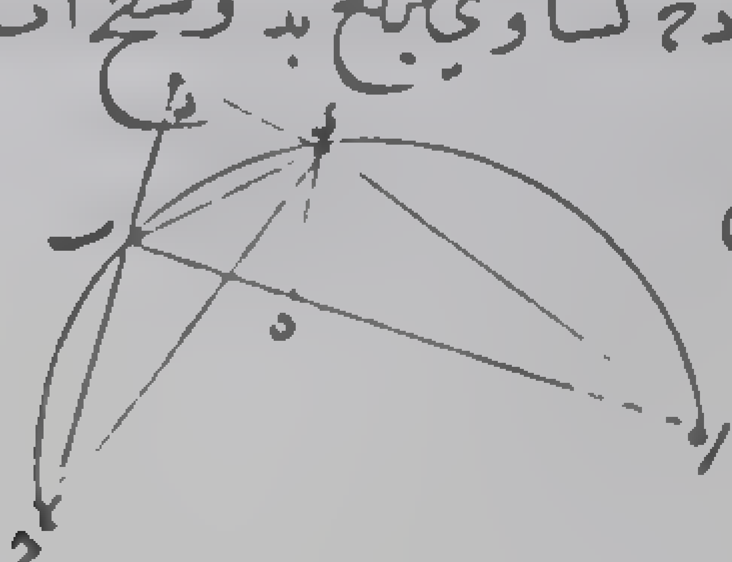
فقسمها بقسمين مختلفين فان ضرب احد القسمين المختلفين في الآخر ومربع ذلك الخط مساو
لمربع احد الساقين فليكن مثلث آدح متساوي ساقي دا دح ولنخرج فيه الى القاعدة خط
دب كيف اتفق بعد ان لا يكون عمودا عليها فاقول ان ضرب آب في بح مع مربع دب مساو
لمربع آد برهانه انا نديرعلى مثلث آدب دائرة ونخرج عمود ده فلان خط آح قسم بنصفين
على ه وبقسمين مختلفين على ب يكون مربع آه مساويا لضرب آب في بح مع مربع هب و
نجعل مربع ده مشتركا فيكون مربعا آه هد اعني مربع آد مساويا لضرب آب في بح مع مربعي



هب هد المساويين لمربع بد فمربع آد مساو لضرب آب في بح
مع مربع دب وقد تبين في برهان الدعوى الاولى ان بح
مساوي بح اذا جعل قوس دح مساوية لقوس آد ووصل
بح دح فضرب آب في بح مساوي ضرب آب في بح مع مربع
دب ولذلك صار هذا من اللواحق واما ابو سعيد السجزي وابو علي البصري فجعلا
آبح منحنيا في قوس آدح وادعيا ان ضرب آب في بح مع مربع دب مساو لمربع آد ثم اخرجا
للبرهان بح وجعلاه مساويا لبح ثم ساقا البرهان كما تقدم بعينه

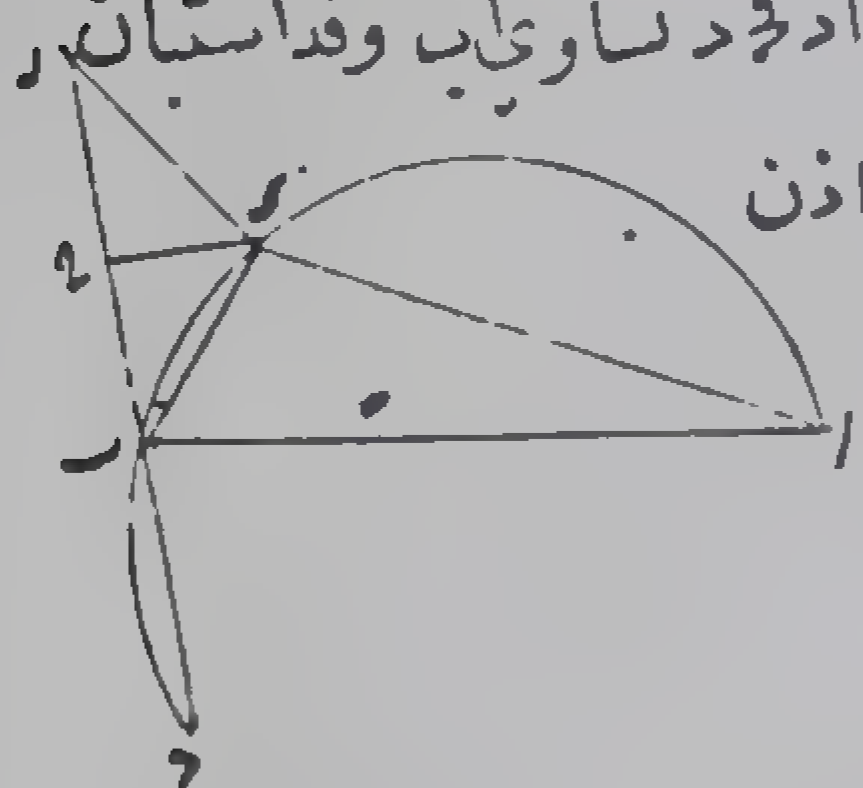
برهان عليها لابي نصر منصور بن علي بن عراق

اوضـــــ ان ضرب آب في بح ومربع دب يساوي مربع آد برهانه انا نخرج حب
من نقطة ب على استقامته ونخرج در عمودا عليه وكذلك نخرج ده عمودا على آب ونصل
دب آد دح فلان زاوية آبح بمقدار تمام قوس آدح الى تتمة الدائرة تكون زاوية آبر بمقدار
آدح ولذلك زاوية هبد مساوية لزاوية دبر لان قوس آد مساوية لقوس دح وضلع دب
مشترك لمثلثي بدر بده وزاوية ه قائمة كما ان زاوية ر قائمة فبر يساوي به ودح يقوي
على حر رد وبد يقوي على در رب فحد يقوي على حب وزيادة قوة حد على قوة بد وتلك
الزيادة هي مربع حب مع ضعف بر في بح وآه مساو لمجموع هب بح وقد كان تبين ان هب
يساوي بر فآب يساوي بح وضعف بر فمربع دح يساوي مربع بد وسطح آب في بح وذلك ما



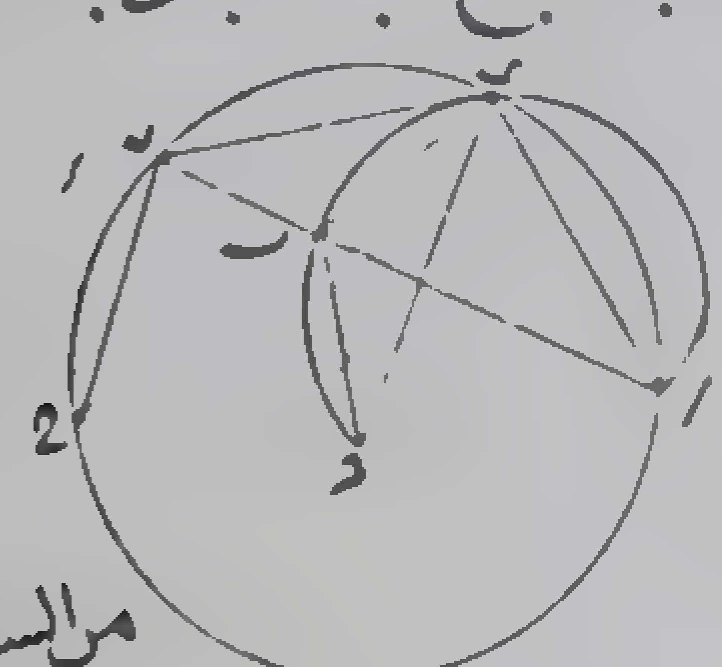
اردنا ان نبين وهذا من اللواحق

لأخذ مساواة آه مجموع هب لح مسلما من غير برهان برهان ثان لأبي نصر منصور بن
علي بن عراق عليها قال نخرج جب من نقطه ب على استقامته ونخرج دح عمودا على جح
ونجعل حه مساويا لحج ونصل ده فلان مربع ده مساو لمربعي دح حه ومربع دب مساو لمربعي
دح حب فان مربع ده مساو لمربع دب ومربع بح وضعف حب في حه لكن حه يساوي حب
فمربع ده مساو لمربع دب وسطح به في جب جميعا ولان زاوية ه تساوي زاوية آ وخط دب
قد قسم زاوية آبه بنصفين وزاوية ب تساوي زاوية دبه وزاوية آبد تساوي زاوية هبد
وقد كانت زاوية ه مساوية لزاوية آ وضلع ده مساو لضلع آد فخط بد يساوي آب وقد استبان
ان مربع ده يساوي مربع دب وسطح به في هب فمربع آد اذن
مساو لمربع دب وضرب آب في بح وذلك ما اردنا ان نبين
وهذا من السوابق لاستغنائه عن خاصية الخط
المنحني وبانيه لان برهن بر على تلك الخاصية



برهان لأبي سعيد السجزي عليها

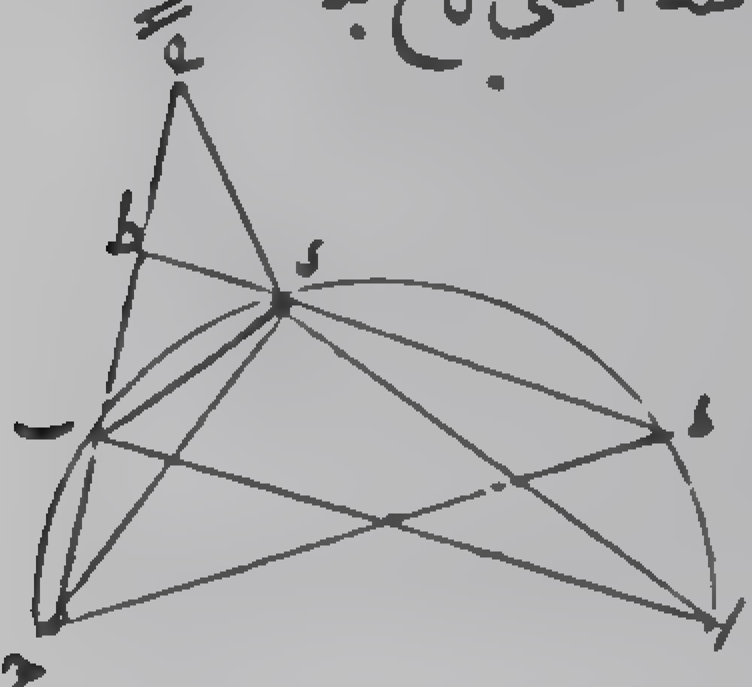
قال نخرج آب على استقامته حتى يكون مثلث آدر متساوي ساقي آد در كما تقدم ونديرا
على مثلث آدر دائرة يحيط به ونخرج دب على استقامته الى ح من محيط الدائرة ونصل رح
وضرب آب في بر مساو لضرب دب في بح ولكن دب في بح ومربع دب مساو لضرب بح
في دح ولكن دب في بح ومربع دب مساو لضرب دح في دب ولان زاويتا دبا دحر من
مثلثي دبر دحر متساويتان لانهما على قوسي آد در المتساويين وزاوية د مشتركة
لهما يكون مثلثا دبر دحر متشابهان واضلاعهما متناسبة فنسبة دح الى دب كنسبة در الى دب
فدح في دب مساو لمربع در لكن دح في دب مساو لآب في بر ومربع دب وآب في بر المساوي
لبح مع مربع دب مساو لمربع آد المساوي لدر وذلك
ما اردنا ان نبين وهو من اللواحق ما دام لم يوجد فيه
مساواة بر لبح مسلما فاما اذا بين بمثل ما تقدم
ثم يسلق منه الى خاصية الخط المنحني كان حينئذ



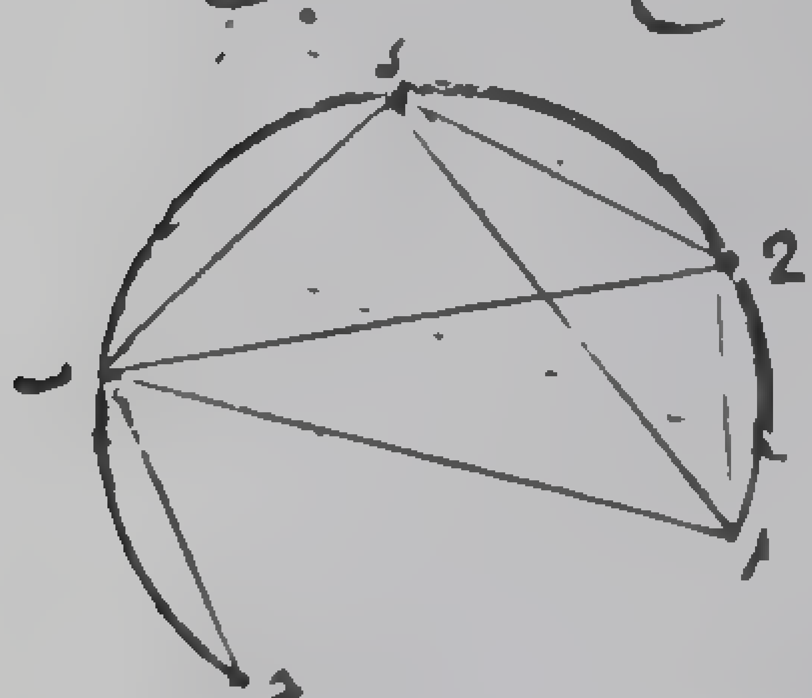
من السوابق

السوابق برهان عليها لابي عبد الله الشني

قال نعمل قوس آر مساوية لقوس بج ونصل جر ونخرج خط هت على استقامته في جهة
ت ونعمل خط بح مساويا لخط جر ونصل دح دز ونخرج دط عمودا على بح فلان خط
بح مساو لخط جر وخط جد مشترك فكلي ح ج جد مساو لكلي ز ج جد وزاويتا حجد
دجز متساويتان لانهما يوتران قوسي بد دز المساويين لجد مساو لدز لكن دز مساو لدب
فحد مساو لدب ودط عمود على بح فطح مساو لطب فخط بح خط مستقيم قسم بنصفين
على نقطة ط وزيد فيه خط بج على استقامته فضرب جح في حب ومربع بط مساو
لمربع طج ونجعل مربع دط مشتركا فضرب جح في حب مع مربعي بط طد اعني مربع بد مساو
لمربعي جط طد اعني مربع جد لكن آب مساو لجح وضرب

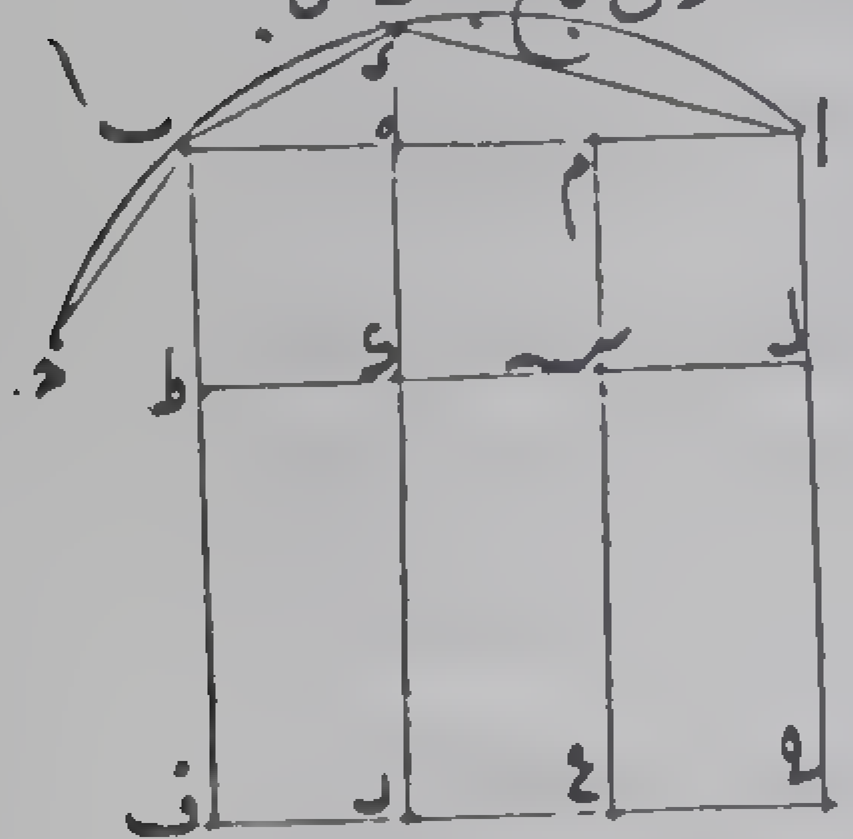


آب في جح ومربع بد مساو لمربع جد وذلك ما اردنا
وهذا من السوابق لاستغنائه عن تلك الخاصية
برهان عليها لي
لنخرج دح موازيا لآب ونصل آج آد دح دب فلان قوس آد مساوية لقوس دج
وقوسا آح دب متساويتان بقي قوس حد مساوية لقوس بج فوتراها متساويان و
لان ذا اربعة اضلاع آح دب في دائرة يحيط به يكون ضرب آد في حب مساويا لمجموع

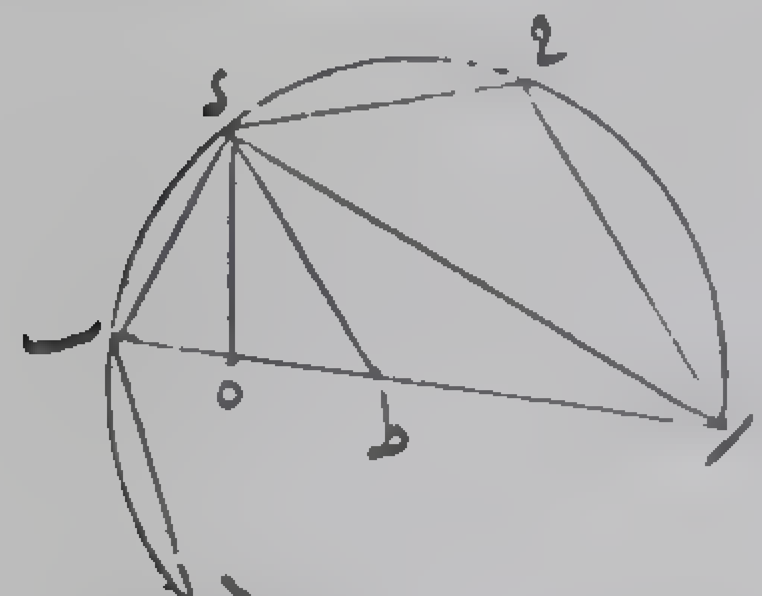


ضرب حد في آب وضرب آح في دب لكن دح مساو لبج وآد
حب متساويان وآح دب متساويان فاذن مربع آد مساو
لضرب آب في بج اعني حد ومربع دب وذلك ما اردنا ان نبين
وهذا ايضا من السوابق لمثل ما تقدم
برهان ثان لي عليها
لنتنزل عمود ده على آب ونقيم على خط آه مربع آر وعلى خط هب مربع هط و
نخرج ط على استقامته الى ل ونعمل هم مساويا لهب ونخرج مس موازيا
لهد ونتمم سطح آح فظاهر ان تما مساو لبج وانه اعني تا فصل ما بين قسمي قاعدة مثلث آدب

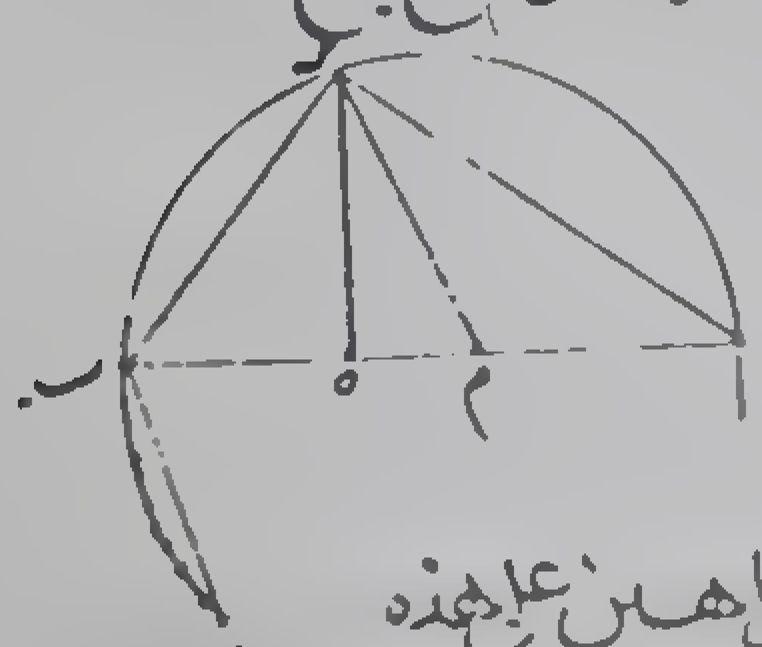
الذين هما آه هب نظاهر ايضا ان تما مساو لـكـر ولذلك سطح كف مساو لسطح تمل
لساوي طك تس وان سطح طح هو مربع آر منقوصا منه مربع تك اعني مربع هس وهذا
السطح اعني طح هو ضرب لط المساوي لاب في طف المساوي لما الذي هو مساو لح فاذا زدنا
عليه مربع تد كنا كانا زدنا فيه مربع تك اعني مربع هس فتم مربع هج ثم زدنا على
الجملة مربع هد تكن مجموع هد ومربع هج الذي فتم تساوي مربع آد فاذن مربع تد وضرب
آد في تح تساوي مربع آد وذلك ما اردنا ان نبين
وهـذا من اللواحق لاضطراره الى تلك الخاصية



برهان ثالث لي عليها من غير رسالة على المجسطي
ننزل عمود ده ونصل آد ونخرج دط موازيا لح آ فتكون
مساوية له ولدب وزاوية دطا منفرجة فمربع آد
يزيد على مربعي آط طد بضرب آط في طب اعني في طه مرتين لكن ضرب آط في طب
مع مربع آط مساو لضرب تا في آط فمربع آد اذن مساو لمجموع مربع دب المساوي لد اعني لدط اي
ضرب دب في حا وضرب تا في آط اعني مربع آط وضرب طه في طا مرتين لكن آط مثل ح ده
وح د مثل لح فمربع آد مساوٍ لمربع دب وضرب آب في لح
وذلك ما اردنا بيانه . وهذا من السوابق

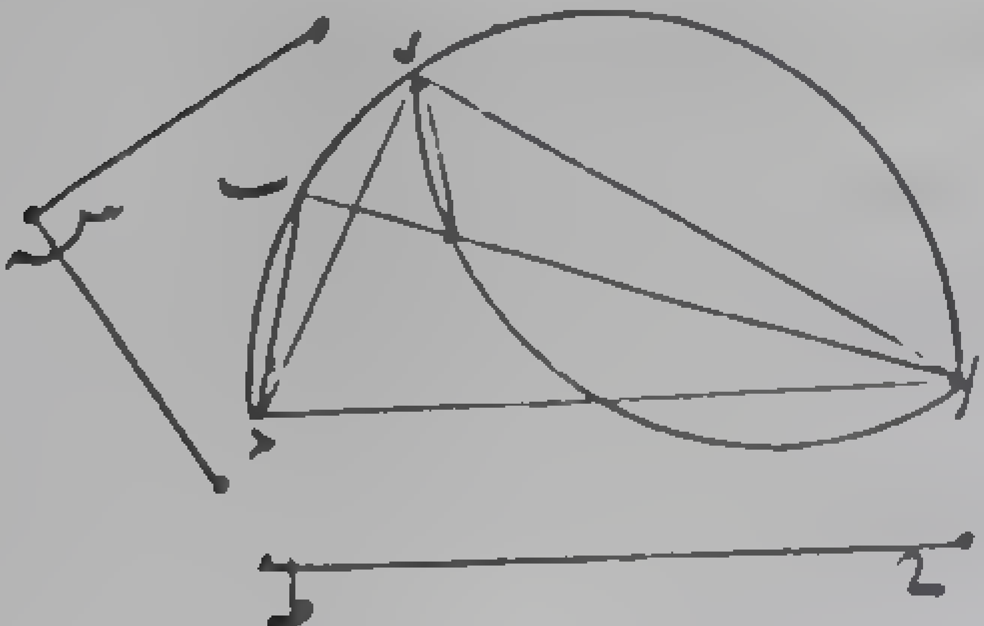


برهان رابع لي عليها
فلت ننزل ده عمودا على آب ونفرز هم مساويا لهب
فيكون تم خطا مستقيما قسم بنصفين على ه وزيد فيه خط ما على استقامته فضرب
تا في آم مع مربع هم مساو لمربع آه ونجعل مربع هد مشتركا فضرب تا في آم مع مربع هم
اعني به ومع مربع هد مساو لمربع آه مع مربع هد لكن تد تقوى
على ده هب وآد تقوى على آه هد فضرب تا في آم ومربع
تد تساوي مربع آد وذلك ما اردنا ان نبين وهذا
ايضا من اللواحق لما كررنا ذكره فهذا ايضا ما لهم من البراهين على هذه



هذه الدعوى الاخيرة ولقد حل هذان الشكلان من الاصول الهندسية
محلا جليلا والت اليهما منها اسباب عظيمة القدر ما سنح اولیک منها تابع شتى
واحلت انا عليهما في عدة مسايل كتب سئلتها وسأذكرها منها ما اذكره بعون الله وتوفيقه
وتسديده اخراج خطين من نقطتين مفروضتين يحيطان
بزاوية مفروضة وتساوي مجموعهما خطا مفروضا

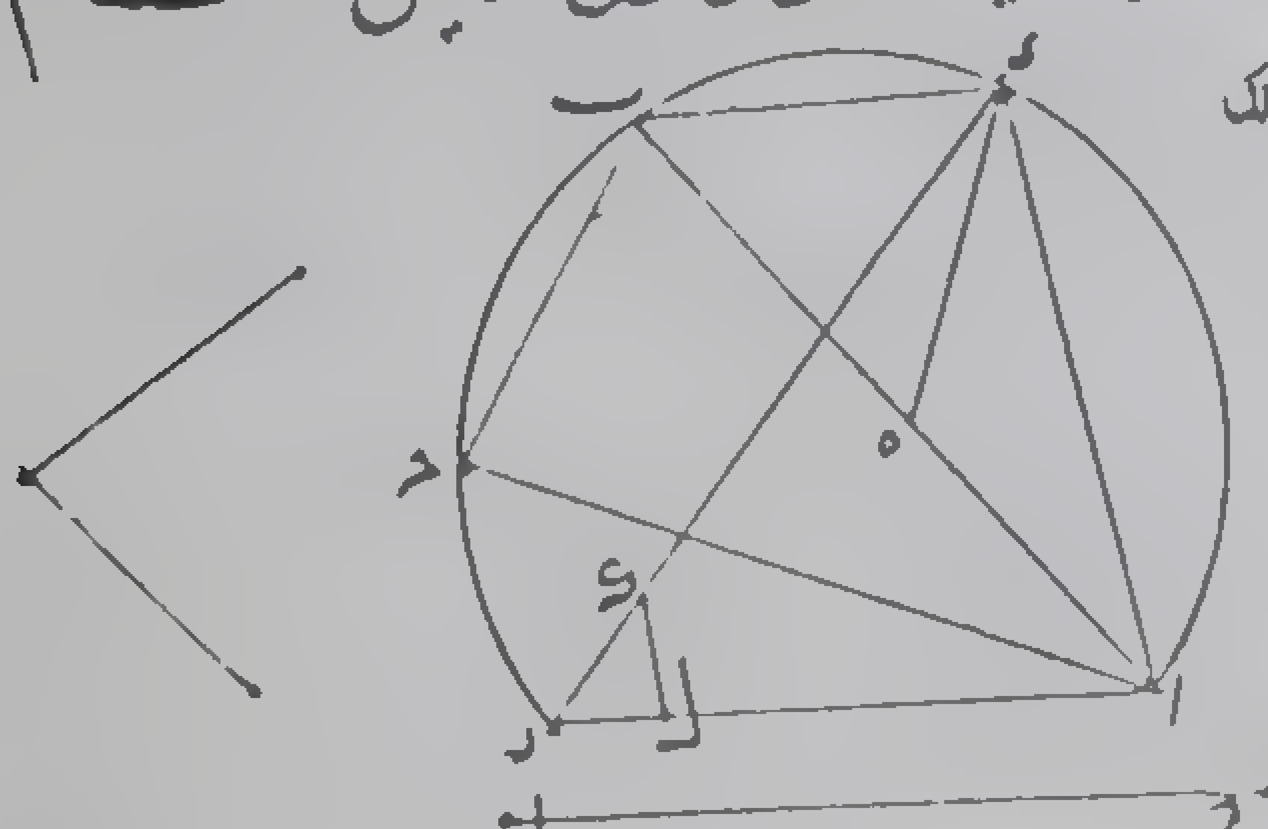
ان مالاناوس رام في الشكل الثاني من المقالة الثالثة من كتابه في الاصول الهندسية ان
يبين كيف نعطف في نصف دايرة مفروضة خطا منعطفا مساويا لخط مفروض فسلك
اليه مسلكا طويلا جدا ثم عمله ثابت بن قرة حين فسر هذا الكتاب بعمل في طول عمل
مالاناوس واما بعد تقديم ما تقدم من خاصية الخط المنحني في تقعير كل قوس فقد سهل
عمل ما رامه مالاناوس بل يكون اعم في جميع قسي الدايرة المفروضة ثم ان ابا الجود
محمد بن الليث رحمه الله افرد لهذا الشكل مقالة واستخرجه بطريق تجاوز كل طول
وصعوبة فلما وقف عليها ابو سعيد احمد بن محمد بن عبد الجليل بين له استخراجه بطريق
هو في غاية السهولة ولن نقصر عند فيها هذا الذي شرح اليه بحصول خاصية الخط
المنحني في القوس وانقسامه بالعمود النازل عليه من منتصف تلك القوس وهذا هو المطلوب
ونريد ان نخرج من نقطتي آ ج المعلومتين خطين مستقيمين يجتمعان عند نقطة ويحيطان
بزاوية مساوية لزاوية س ويكون مجموعهما مساويا للخط ح ط المفروض فنصل آ ج ونعمل
عليه قطعة قوس تقبل زاوية كزاوية س وهي قطعة آ د ج ولتكن نقطة د منتصف هذه
القطعة ونصل آ د وسواء يكون خط ح ط المفروض اعظم من آ ج وليس باعظم
من ضعف مربع آ د حتى يكن فيه حصول المطلوب ثم نديم على آ د نصف دايرة
آ ك د ويحيط فيه وترا آ ه مساويا لنصف خط ح ط ثم نخرجه على استقامته الى ب ونصل
ب د فاقول ان مجموع خطي آ ب ب ج مساو لخط ح ط وزاوية آ ب ج مساوية لزاوية س
برهان ذلك انا نصل د ه فيكون عمودا على آ ه ولان هذا العمود نازل من منتصف قوس آ د ج
يكون خط آ ه مساويا لمجموع خطي ه ب ب ج لكن آ ه فرض مساويا لنصف ح ط فمجموع ه ب ب ج



مساو لنصفه الاخر فجميع خطي اب بج مساو لخط ح ط كله
وزاوية اب ج مساوية لزاوية س لانهما في
قطعة قوس تقبل زاوية مساوية لها وذلك
ما اردنا ان نبين

اخراج خطين من نقطتين مفروضتين يحيطان
بزاوية مفروضة ويكون فصل احدهما على الآخر
مساويا لخط مفروض ـــ ي

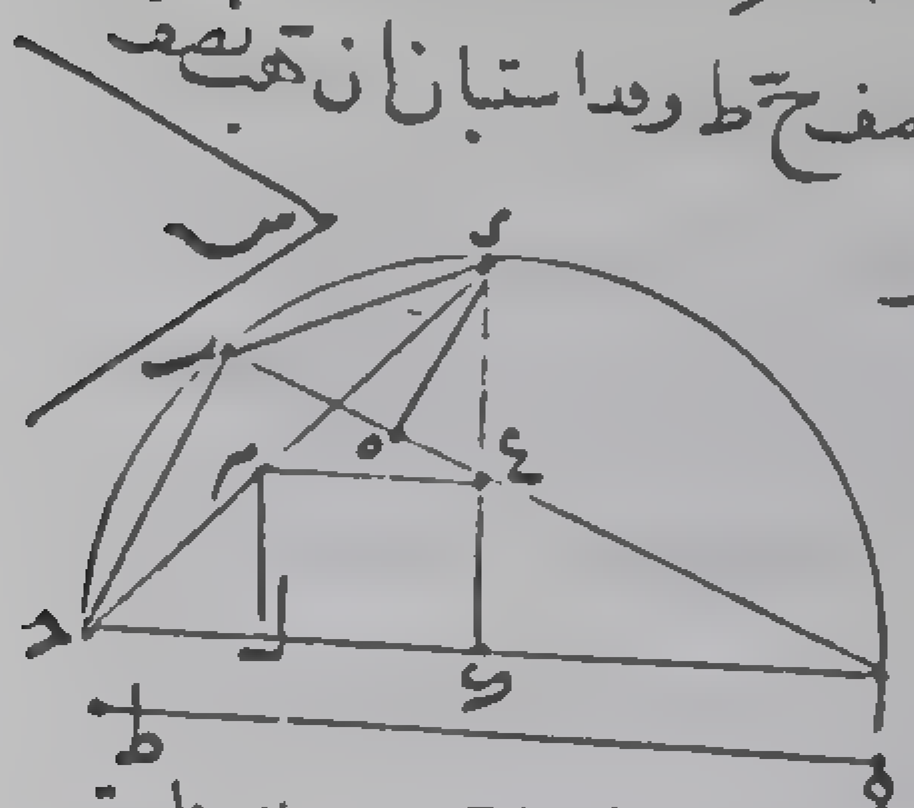
ونريد ان نخرجهما من نقطتي اج يحيطان بزاوية مساوية لزاوية س ويكون فصل احدهما
على الاخر مساويا لخط ح ط فنصل اج ونركب عليه قطعة قوس قابلة لزاوية مساوية
لزاوية س ونصفها على د ونتم اد لحر نصف دايرة ونصل اد دز اه ونفرض دح
مساويا لنصف خط ح ط وننزل عمود ح ل على از لم يوقع ونرد ده مساويا لدل ونصل
اب بج فاقول ان فصل اب على بج مساوي خط ح ط برهان ذلك ان ننزل
عمود ده على اب فلان زاويتي ده دزا متساويتان لكونهما على قوس واحدة ومن اد
وزاويتي ده ك ل قائمتان فمثلثا دهب ك ل ر متشابهان لكنا فرضنا ده مساويا
لدل فالمثلثان مع تشابههما متساويان فكر مساو لهب لكن كر فرض مساويا لنصف
ح ط ومعلوم مما تقدم ان نصيف عمود ده خط اج المنحني زهب نصف فصل اب
على بج فضعفه هو كل الفصل واذا كان نصف الفصل مساويا لنصف ح ط فكله
مساو لكل ح ط ويحتاج هذه المسيله الى شريطه وهي ان يكون كر ليس باعظم
من اد والا لم يوجد المطلوب وذلك
ما اردنا ان نبين والله اعلم



طريق اخر في ذلك ـــ ي

نصل اج وندير عليه قطعة تقبل
زاوية مساوية لزاوية س ونصفها
على د ونصل دج وننزل عمود دك على اج ونجعل كل مساويا لنصف ح ط ونخرج

ونصل آب بج فيكون
نخرج لم موازيا لدك وقع موازيا لكه ويجعل وترد ب مساويا لدم ونصل آب بج فيكون
مثلث ابج هو الذي اردناه برهان ذلك ان ننزل عمود ده على آب فظاهر ان مثلثي ده د حك متشابهان لتساوي
زاويتي ده دحك اللتين على قوس آد وتساوي زاويتي ده هب دكج اذ كل واحدة منها قايمة
ولان مع موازي كج فان مثلث دمع ايضا شبيه بمثلث ده لكن دم مساو لدب فمع مساو لب ه
وتم ع مساو لكل فه ه مساو لكل الذي هو مساو لنصف حط وقد استبان ان هب نصف
فصل آب على بج فضعفه هو كل الفضل وهو مساو

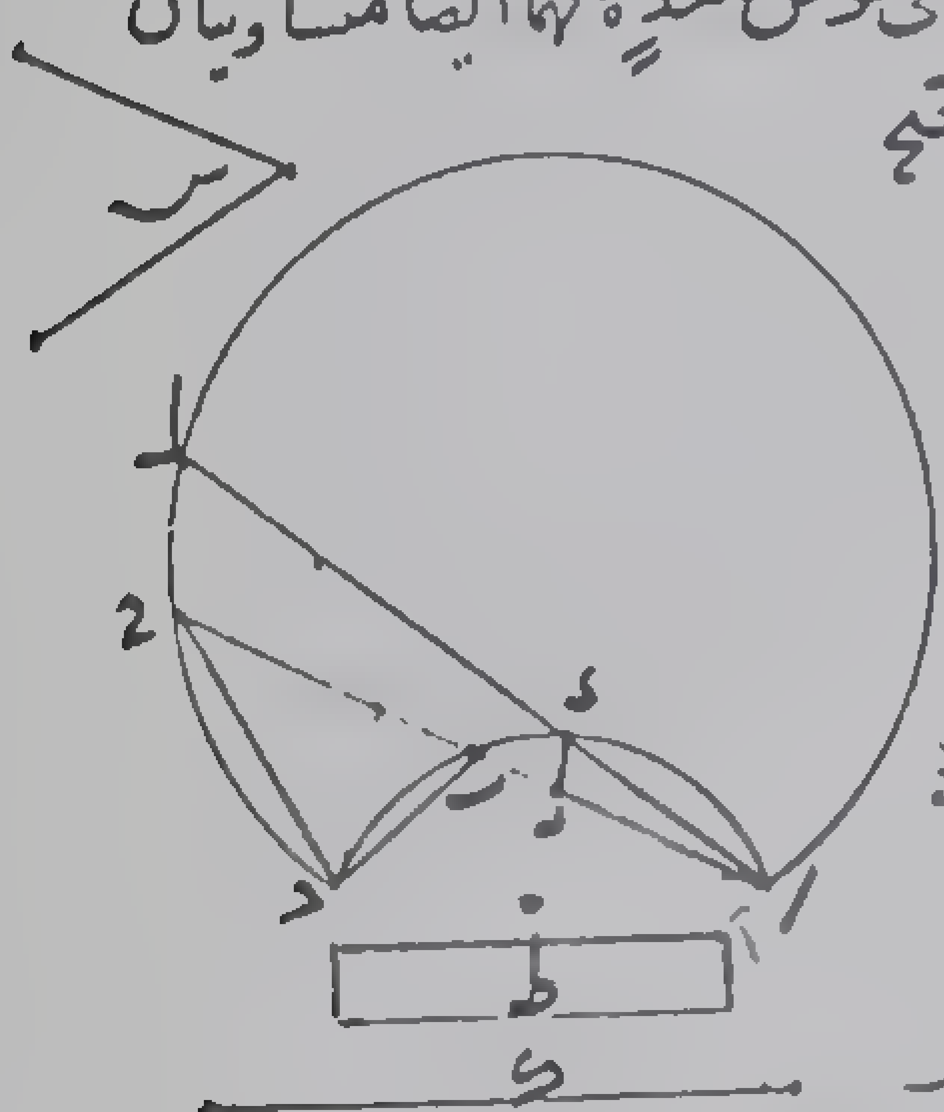


لحط وذلك ما اردنا ان نبين
اخراج خطين من نقطتين مفروضتين يحيطان
بزاوية مفروضة يكون ضرب احدهما في الاخر مساويا
لسطح مفروض ولي
ونريد ان نخرجهما من نقطتي آج يحيطان بزاوية
كزاوية س ويكون ضرب احدهما في الاخر مساويا لسطح ط فليكن الخط القوي على سطح ط خط ط
ونصل آج ونركب عليه قطعة تقبل زاوية كزاوية س وننصفها على نقطة د ونصل آد وندير عليه
نصف دايرة اح د ونوقع فيه وتر اح مساويا لخط ك ونصل دح ونجعل وتر دب مساويا
لوتر دح ونصل آب بج فاقول ان ضرب آب في بج يساوي سطح ط برهان ذلك ان مربع آد
كما بينا فيما تقدم يساوي مربع دب وضرب آب في بج لمربع آد منقوصا منه مربع دب يساوي ضرب
آب في بج لكن مربع آد منقوصا منه مربع دب هو مساو لمربع آح لانا فرضنا دب مساويا لدح فمربع
آح اذن يساوي ضرب آب في بج ولكن مربع آح اعني مربع خط ك قد جعل مساويا لسطح ط فضرب آب
في بج يساوي سطح ط وذلك ما
اردنا ان نبين
طريق اخر شبيه بذلك لابي
عبد الله الشنّي



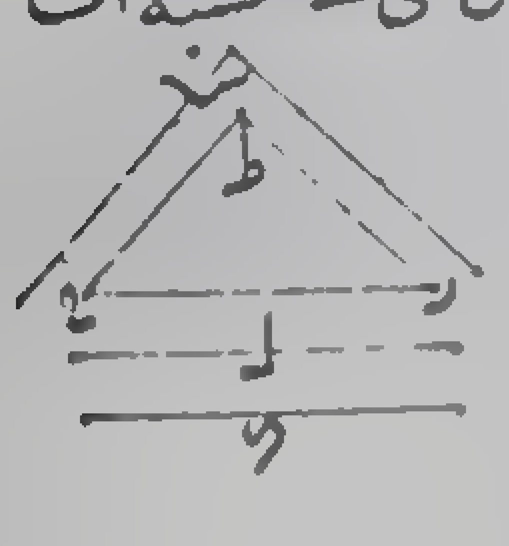
نصل آج ونركب عليه قطعة تقبل زاوية مساوية لزاوية س ونجعل خط ك قويا على سطح ط
المفروض ونخرج وتر آد الى نصف قوس آدب فان لم يكن خط ك اقصر من خط آد

والا فليس المطلوب بممكن فليكن خط ةك اقصر من آد ثم نخرج وتر د ب قويا على فضل مربع آد على
مربع ةك ونصل آ ب ج فاقول ان ضرب آب في ب ج مساوٍ لسطح ط المفروض برهان ذلك
انا نجعل نقطة د مركزا وندير ببعد د آ قطعة دائرة عليها اج ونخرج خطي آد آب على استقامتهما
الى محيط تلك القطعة ونصل د ح فيكون مساويا لد آ ونخرج د ر مساويا لد ب فيكون آ ر يكون
مساويا لح ج وزاوية ا ر د منفرجة فمربع آد مساوٍ لمربع آر ومربع ر د وضرب آر في ر ب مرة واحدة
لكن د ر مساوٍ لد ب ومربع آر مع ضرب آر في ر ب مساوٍ لضرب با في آر اعني ضرب آب في ب ح
فمربع آد اذن مساوٍ لمربع د ب وضرب آب في ب ح وقد جعلنا فضل مربع آد على مربع ةك مساويا
لمربع د ب فضرب آب في ب ح اذن مساوٍ لمربع ةك اعني مساوٍ لسطح ط المفروض ثم نفصل
خطوط ح ج ح ل ح ر فزاوية ا د ح مساوية لزاوية ا ح ج لانها في قطعة واحدة فزاويتا ل د ح ح ج
اذن متساويتان ومن اجل ان زاويتي ا ج ا ح ج مركبتان على قوس واحدة فهما ايضا متساويتان
فمثلثا ل د ح متشابهان ومثلث ل د ح مساوي الساقين فمثلث ح ج ح



مساوي الساقين ايضا فح ب مساوٍ لح ج فضرب آب في ح ج
اذن مساوٍ لسطح ط المفروض وذلك ما اردنا ان نبين
اخراج خطين من نقطتين مفروضتين يحيطان
بزاوية مفروضة ويكون نسبة احدهما الى الاخر كنسبة
معلومة

ونريد ان نخرجهما من نقطتي آ ج يحيطان بزاوية كزاوية س و
يكون نسبة احدهما الى الاخر كنسبة ل الى ك فنعمل خطي ط ر ر ح يحيطان بزاوية كزاوية س ونجعل
ر ط مساويا لخط ك و ر ح مساويا لخط ل ونصل ط ح ثم نركب على خط آ ج قطعة تقبل زاوية كزاوية س
ونعمل زاوية ح آ ب مساوية لزاوية ر ح ط ونصل ب ج فاقول انا عملنا ما اردنا برهان ذلك
ان زاوية ط ر ح مساوية لزاوية آ ب ج وزاوية ط ح ر مساوية لزاوية ح آ ب فمثلثا آ ب ج ر ط ح متشابهان
ونسبة آب الى ب ج كنسبة ح ر الى ر ط لكن نسبة ح ر الى ر ط جعل كنسبة ل الى ك فنسبة آب
الى ب ج كنسبة ل الى ك وذلك ما اردنا ان نبين

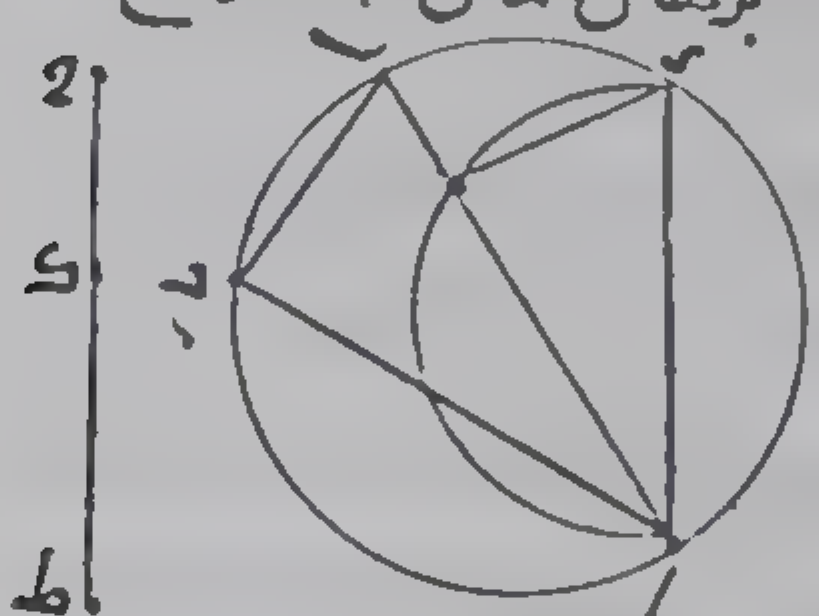




وهذه الاخير وان لم يتصل بخواص الخط المنحنى فانى حسبته لسلق بما ذكرته من هذه
المسايل الى سايرانواعها التى يودي ليها القسمة فلم يكن الغرض فى ذكرها استيفاء
جميعها حتى اعرض منها بجميع ما يحتمله سريع القسمة لكنى حكيت منها ما اتفق لى الجواب
عنه مستنبطا من خواص تلك الدعاوي المقدمة كما سياتى على جميع ما اتفق من ذلك لى ولغيرى

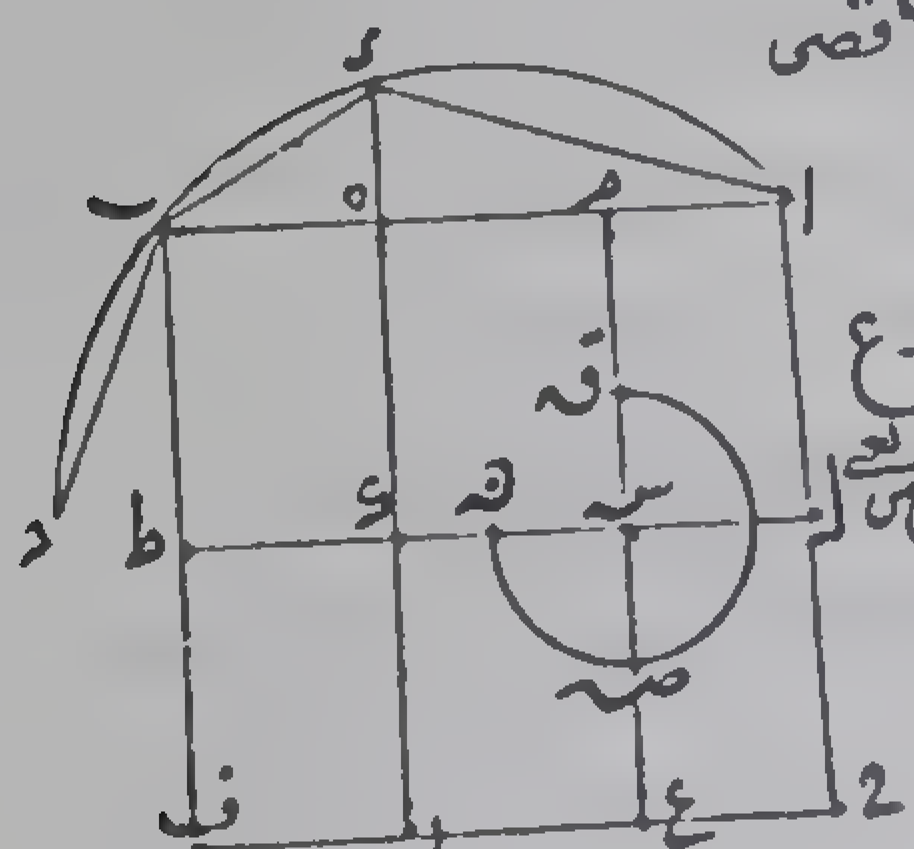
عمل مثلث فى دايرة مفروضة يساوى
مجموع اضلاعه خطا مفروضا لى

كيف نعمل فى دايرة مفروضة مثلثا يساوي مجموع اضلاعه خطا مفروضا وهو ح ط وينبغى ان
يكون ح ط ليس باكثر من مجموع المثلث المتساوي الاضلاع الواقع فى الدايرة فنعلم على خط ح ط
نقطة ك كيف اتفقت ونوقع فى الدايرة وتر آح مساويا لح ك ونصف قوس آح على د ونصل
آد وندير عليه نصف دايرة اهد ونوقع فيه وتر آه مساويا لنصف ك ط ونخرج آه على استقامته
الى ب ونصل ح ب فمثلث آح ب يساوي مجموع اضلاعه خط ح ط برهان ذلك ان آح يساوي ح ك
وآه وهو نصف خط آح ب المنحنى يساوي نصف ك ط فكله
يساوي ك ط فاضلاع مثلث آح ب مجموعه يساوي
خط ح ط وذلك ما طلبنا به ٥



برهان عمل ارشميدس فى استخراج اعمدة المثلثات
المعلومة الاضلاع ومساقط احجارها قال ارشميدس نلقى مربع احد الضلعين
من مربع الاخر ونقسم ما بقى على القاعدة فما خرج فهو الذي ان زدناه على القاعدة واخذنا نصف
ما اجتمع كان القسم الاطول الى مسقط الحجر وان نقصناه منها واخذنا نصف ما بقى كان القسم
الاقصر اليه وبرهانه الذي سيلت عنه ان نفرض المثلث آدب وعموده ده وندير عليه دايرة
ونفرز دح منها مساويا لدآ ونصل آح ونعمل على آه مربع آر وعلى ه ط مربع ه ط ونجعل ه م
مساويا له ت ونخرج م ع موازيا له ر و ط ك ل موازيا له ب ونتم سطح آف فلان ذ ب
نقوي على د ه ه ب ود آ يقوي على د ه ه ا تكون مربع د ه مشتركا فى القولين معا فاذا القينا
مربع د ه من مربع ذ ب كنا كانا القينا مربع ه ب من مربع ه ا ولا خفا بان ذلك الباقى يكون العلم

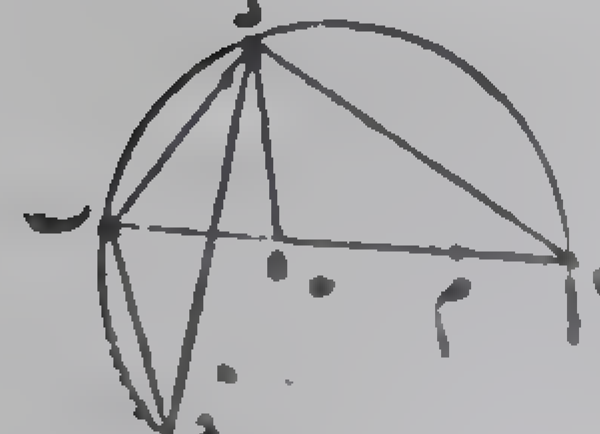
الذي عليه قصن ولمساواة خطوط طحه كحس تم وخطوط طف كحم يتساويا
سطوح طحكع مل فاذن سطح طح مساوٍ لعلم قصن لكن طف اعني ام تساويه كح
لان خطي ام مه تساويان خطي هب كح فاذن سطح طح هو ضرب اب في كح فاذا قسمناه على القاعدة
خرج كح فان زدناه على القاعدة اجتمع خط اح المنحني ونصفه تكون اد القسم الاطول
وان نقصناه من القاعدة بقي مب ونصفه به وهو القسم الاقصر
من القاعدة الى المسقط الحجر وذلك ما اردنا ان نبين



وقد نستعمل مكان فضل ما بين مربعي اد دب مضروب مجموع
اد دب في فضل ما بينهما لانهما متساويان فان فضل ما بين مربعي
اه هب يساوي مضروب اب في فضل ما بين اه هب اعني كح

برهان ثان لي اخف من الاول

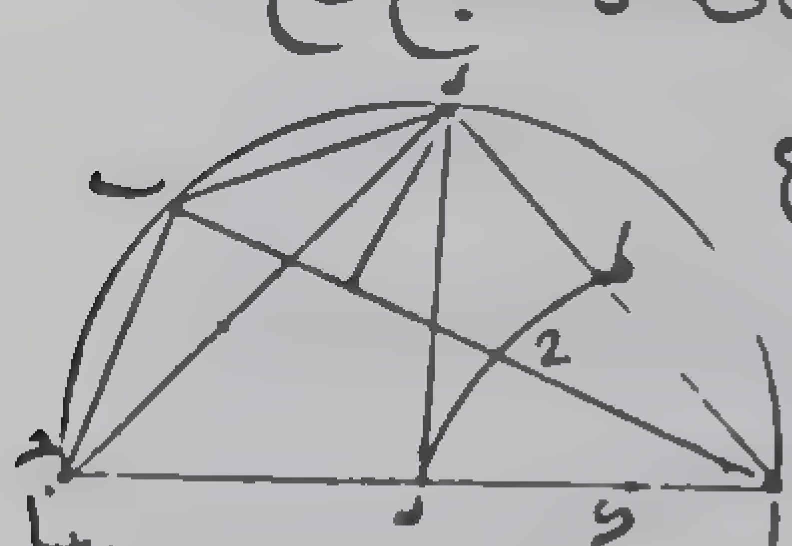
نعيد المثلث وندير عليه دائرة ونفرد قوس دح مساوية لقوس دا ونصل كح ونجعل هم مساويا
لهب فلان مربع اد يساوي مربع بد وضرب اب في كح يكون اذا نقصنا مربع بد من مربع اد بقي
ضرب اب في كح فاذا قسمناه على اب القاعدة خرج كح فاذا زدناه على القاعدة اجتمع خط
اح المنحني ونصفه اه واذا نقصناه من اب بقي مب ونصفه هب
وذلك ما اردنا ان نبين



برهان عن ارشميدس في مساحة المثلثات
من جهة تفاضل اضلاعها لابي عبد الله الشني

قال ارشميدس اذا اردنا مساحة كل مثلث من جهة اضلاعه فانا ناخذ فضل نصف
جماعة اضلاعه على كل ضلع من اضلاعه ونضرب احد تلك الفضول الثلثة في آخر
منها ثم ما بلغ في الثالث ثم ما بلغ في نصف جماعة اضلاع المثلث وناخذ جذر المبلغ فما كان فهو
مساحة ذلك المثلث قال ابو عبد الله برهان ذلك انا نجعل المثلث عليه ابج ونخط عليه
دائرة ادبج وليكن نقطة د على منتصف قوس ادج ونخرج منها على خط اب عمود ده
وعلى خط اد عمود دز ونصل دا دج دب ونجعل نقطة ا مركزا وندير ببعد اد قوس

قوس رح ط من دایرة تقاطع خط اه على نقطة ح وخط اد على نقطة ط فمربع دا مساو لمربعي
ده ها وخطا اط اد متساويان يكون مربع دط وضرب دط في طا مرتين وذلك مساوٍ لمربع در
لانا جعلنا اط مساويا لار تكون مربع در مساويا لمربع ده مع مربع هج وضرب هج في جا مرتين
فمربع در اذن مساوٍ لمربع ده ومربع هج وضرب هج في جا مرتين ولان مثلث هب شبيه بكل واحد
من مثلثي درح در الان زوايا ادر اد حاد متساوية من اجل ان كل واحدة منها يوتر
نصف قوس ادح فنسبة ده الى هب كنسبة در الى را ونسبة در الى را كنسبة مربع در الى سطح در
في را وكنسبة سطح در في را الى مربع را ولذلك ايضا نسبة مربع ده الى سطح ده في هب كنسبة سطح
ده في هب الى مربع هب والمناسبة اذا اسقط عنها متناسبة على نسبتها كانت البواقي متناسبة
فاذا اسقطنا مربع ده من مربع در كان الباقي لما بينا مربع هج وضرب هج في جا مرتين اعني ضرب هج
في مجموع ها ار واذا اسقطنا ضرب ده في هب من ضرب در في را وهو تكسير مثلث داح كان الباقي
هو سطح مثلث احه وذلك لما نبين من خواص الخط المنحني واذا اسقطنا مربع هب اعني مربع كر
اذا جعلنا رك مساويا لهب من مربع را كان الباقي هو ضرب دك في كا فمثلث احه اذن يتوسط
في النسبة بين سطح هج في مجموع ها ار وبين سطح رك في كب فاما هج فهو فصل مجموع ها ار وهو
نصف جماعة اضلاع مثلث احه على ضلع اح لانا جعلنا اج مساويا لرح ولان عمود ده يقسم مجموع
خطي اب بح بنصفين على ه وار منقسم ايضا بنصفين على را وار هو فصل مجموع ها ار ايضا على اب
لانا جعلنا اج مساويا لرح ولان عمود ده يقسم مجموع خطي اب بح بنصفين على ه وار منقسم ايضا
بنصفين على د وار هو فصل مجموع ها ار ايضا على اب لانا جعلنا كر مساويا لهب وهج اك
بح فصول نصف جماعة اضلاع مثلث احه على كل واحد من اضلاعه وسواء ضربنا سطح اك في بح
في سطح هج في مجموع ها ار وضربنا اك في بح وهو احد الفصول في الاخر ثم ما بلغ في هج وهو



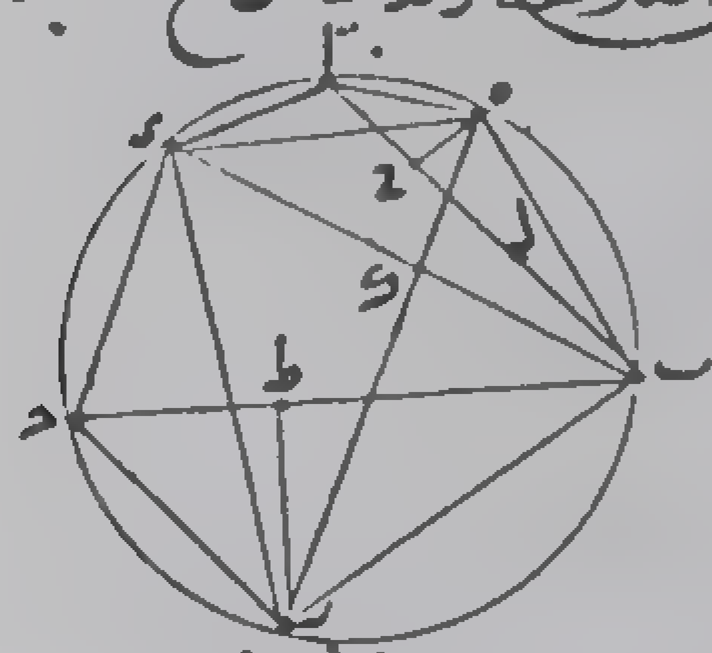
الفصل الثالث ثم ما بلغ في مجموع ها ار وهو نصف جماعة الاضلاع
فان المبلغ في جميعها هو تكسير مثلث احه مضروبا في مثله وذلك ما
اردنا ان نبين وان كان المثلث متساوي الساقين مثل مثلث
ابه كانت نسبة مربع در الى سطح در في را كنسبة هذا السطح بعينه الى مربع را فاما مربع در فقد

انه مساوٍ لمربع دك وضرب دط في طا مرتين اعني مساويا لضرب دط في مجموع دا اد واما
سطح در في دا فهو بكسير مثلث ادح واما مربع ار فهو مساوٍ لسطح ار في رح فلذلك نضرب اط
في كر وهو احد الفصول في الاخر ثم ما اجتمع في دط وهو الفصل الثالث ثم ما بلغ في مجموع دا
اد وهو مجموع نصف الاضلاع فيكون المبلغ مربع سطح در في دا وذلك ما اردنا بيانه

برهان عمل ينسب الى الهند في مساحة المنحرف الذي
يحيط به دايرة لابي عبد الله الشنى

اذا اردنا مساحة المنحرف الذي يحيط به دايرة تقع فيها فانا ناخذ فصل نصف جماعة اضلاعه
على كل ضلع من اضلاعه ثم نضرب احد تلك الفصول في الفصل الاخر ثم ما اجتمع في الفصل الثالث
ثم ما اجتمع في الفصل الرابع ثم نأخذ جذر المبلغ لما كان فهو مساحة ذلك المنحرف فلنخط
للبرهان ذا اربعة اضلاع ابجد في دايرة ابجد ونصف كل واحدة من قوسي اب جد على نقطتي
ه ز ونصل خطوط زه هد در زب ها هح ونخرج عمود هح على اب وعمود زط على جد
ونعلم على تقاطع خطي زه هح نقطة ك فلنا هجا ه كد متشابهان وهد اطول من ها
وكد اطول من كا وزط نصف مجموع كد دح على ما قدمنا فزط اطول من زك فهو اذن اطول
كثيرا من اح وكذلك ايضا يبين بمثل هذا البرهان بعينه ان كح اطول من زط فنفصل من كح خط
حل مساويا لزط ومن زط خط طم مساويا لاح ولان فصل سطح هزد على سطح ابجد هو ضرب
هح في جامع ضرب زط في طج ومثلث هجا شبيه بمثلث هبر فنسبة هح الى جا كنسبة هب الى مد
وكذلك ايضا مثلث طزد شبيه بمثلث هبر فنسبة زك الى كج كنسبة زب الى بر ونسبة هب
الى بر كنسبة مربع هب الى سطح هب في بر وكنسبة سطح هب في بر الى مربع به ومربع بر مساوٍ لضرب
به في هد وكذلك مربع بر مساوٍ لضرب بر في زد وضرب هب في بر هو سطح هزد فسطح
هزد اذن موسط في النسبة بين ضرب به في هد وبين ضرب بر في زد والمناسبة على نسبة
واحدة فان النظاير اذا جمعت كانت المجتمعة متناسبة فنسبة مجموع مربعي هح حط الى مجموع
سطحي هح في جا وحط في طر كنسبة مجموع هذين السطحين الى مجموع مربعي اح رط وايضا
فان المناسبة اذا اسقط عنها متناسبة كانت البواقي متناسبة فاذا اسقطنا مربعي هح جط اعني

اعنی مربعی هج حل لانا جعلنا حل مساویا لهج من مربع تر کان الباقی هو سطح تل فی لا آد وذلک
لانا اذا اسقطنا مربع هج من مربع تد کان الباقی هو مربع کح واذا اسقطنا من مربع کح مربع حل
کان الباقی هو مربع تل وضرب تل فی کح مرتین وذلک مساو لضرب تل فی مجموع کح تل فاما کح فهو
مساو لمجموع حا آد فلذلک یکون الباقی مساویا لضرب تل فی مجموع لا آد واذا اسقطنا مجموع سطح
هج فی جا وحط فی ط من سطح هد کان الباقی هو سطح اتجد واذا اسقطنا مربعی حا رط اعنی
مربعی تط طم من مربع تر کان الباقی هو سطح تم فی تجد على نحو ما بینا فسطح اتجد اذن یبقی متوسطا
فی النسبة بین سطحی تل فی لا آد وتم فی تجد ولان کح نصف مجموع تا آد وکذلک ایضا تط نصف
مجموع تج تد علی ما قدمنا یکون مجموع حد تط نصف جماعة اضلاع سطح اتجد ویکون فصل مجموع
حب تط علی آب هو تم لانا جعلنا طم مساویا لاح ویکون ایضا فصله علی تج هو تل لانا جعلنا
لح مساویا لحط وایضا فان مجموع جا آد دح حط نصف جماعة اضلاع سطح اتجد ففضله
علی آد هو مجموع دح حم لما بینا وفضله تد هو مجموع دا آل لما بینا ایضا فخطوط تل لاد دحم
مب هی فصول نصف اضلاع سطح اتجد علی کل واحد من اضلاعه وقد بینا ان سطح اتجد

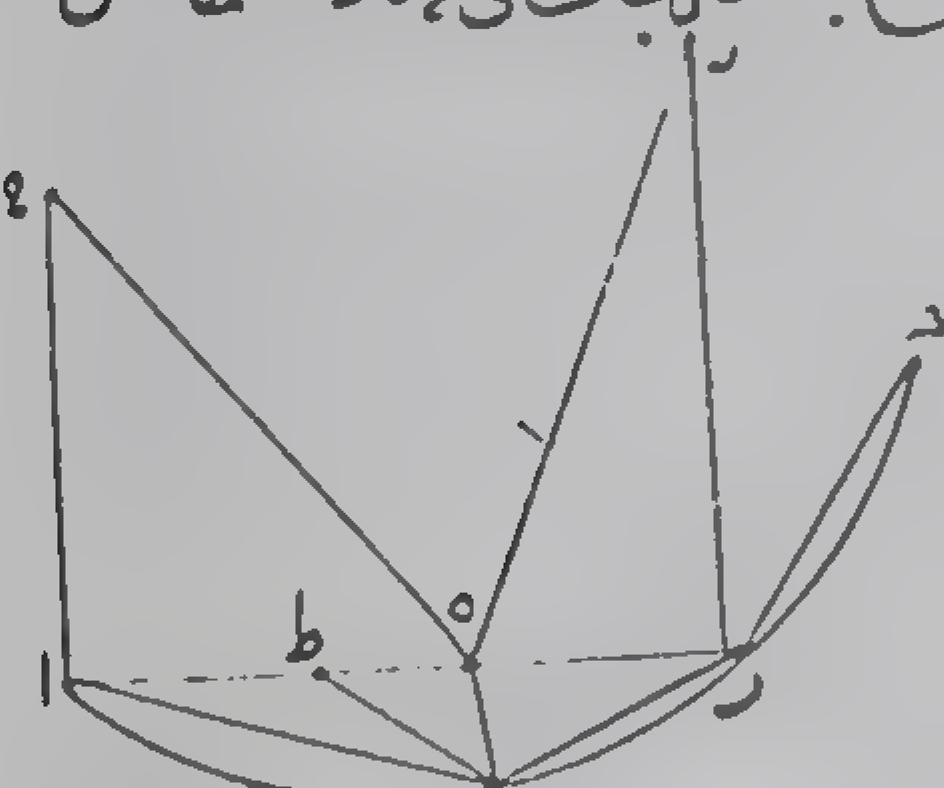


موسط فی النسبة بین سطح تل فی لا آد وبین سطح تم فی تجد
وسواء ضربنا تل فی لا آد ثم ما اجتمع فی سطح تم فی تجد
او ضربنا تل فی لا آد ثم ما اجتمع فی دحم ثم ما اجتمع
فی تم فان المبلغ من کلیهما هو تکسیر منحرف اتجد مضروبا
فی مثله فلذلک نأخذ جذره فیکون المطلوب وذلک ما اردنا ان نبین

مسئلة النخلتین والنهر والطائرین وهی
متداولة فی کتب الجبر والمقابلة لی ٥

نخلتا تر آح معلومتا الطولین وهما علی حافتی نهر عرضه آب وقد ظهرت علی وجه الماء سمکة
فانقض علیها من راسی النخلتین طایران وادرکاها معا فی وقت واحد کیف نعلم بعد موضع
ظهور السمکة من شاطئی النهر وکیف نعلم مقدار ما طاره الطایران فی الهواء الجواب
طولیه انا نضرب کل واحد من النخلتین فی نفسه ونقسم فصل ما بین ما یجتمع منهما علی عرض النهر فما خرج

ربيه على المقسوم عليه وناخذ نصف ما بلغ فيكون بعد موضع ظهور السمكة من اصل النخلة القصيرة
فان القينا ذلك من عرض النهر بقي بعد السمكة من اصل النخلة الطويلة وان ضربنا طول النخلة
في نفسه وبعد ما بين اصلها وموضع السمكة في نفسه واخذنا جذر مجموع المالين كان ذلك هو مما
طاره كل واحد من الطايرين برهان ذلك انا نفرض طول النخلتين آج دب وافصلها آب و
موضع ظهور السمكة على الماء نقطة ه ونصل ده جه فيكونان متساويين لانهما بعدان
قطعهما الطايران في وقت واحد ولذلك يساوي مجموع مربعي دب به مجموع مربعي جا اه فيكون فضل
مربع بد على مربع جا مساويا لفضل مربع اه على مربع به وذلك ظاهر من جهة انه اذا كان مقداران
غير متساويين فان فضل ما بين المفصولين يكون بعينه فضل ما بين الباقيين منهما ونعمل مثلث آبد
ونجعل فيه آد مساويا لبد وبد مساويا لاح ونصل ده فاقول انه عمود على آب برهان
ذلك انه لا يمكن غيره فان امكن فلا يكون عمودا على آب وليكن العمود دط فيكون فضل ما بين مربعي
بد دا مساويا لفضل ما بين مربعي بط طا كما قد بين ايضا انفا ان فضل ما بين مربعي بد دا اعني مربعي
اح بد هو مساو لما بين مربعي اه به وكل واحد من دط ده عمود على آب ففي مثلث دطه زاويتان
قائمتان سوى الزاوية الثالثة هذا خلف لا يمكن فده هو العمود على آب دون دط ثم نذير
على مثلث آدب دائرة يحيط به ونفرز قوس دز مساوية لقوس آد فيكون خط آز منحنيا في
قوس آز وعمود ده يقسمه بنصفين ومربع آد نفضل على مربع بد بضرب آب في زه فاذا قسمنا فضل
ما بين مربعي آد دب اعني مربعي بد آح على آب خرج

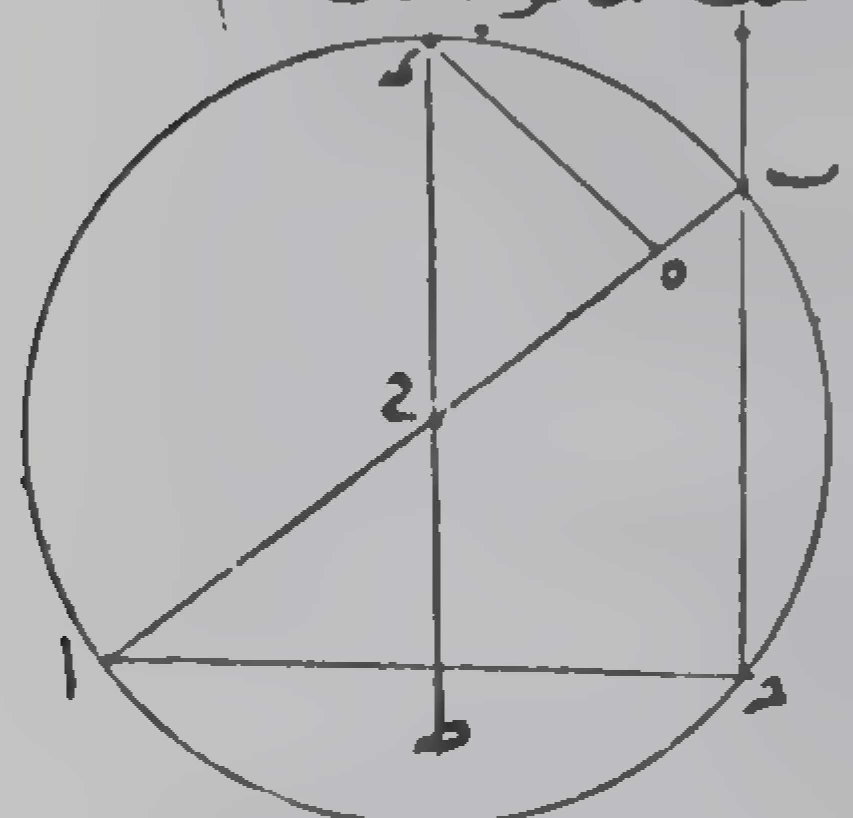


زه فاذا زدناه على آب حصل خط آز المنحني ونصفه
آه وهو بعد موضع السمكة من نخلة آج
واذا نقصنا آه من آب بقي به بعدها من نخلة بد وذلك
ما اردنا ان نبين ه

مسئلة الخشبة التي ذكرها يحيى في كتاب الجبر والمقابلة

سئلت عن خشبة معلومة الطول منصوبة على الارض قائمة على وجهها قد انكسرت وانعطف
راسها حتى بلغ الارض فكان ما بين موضع راسها من الارض الى اصلها معلوما كيف يعلم موضع

مرضع انكسارها فقلت نضرب نصف البعد الذي بين موضع راسه وبين اصله من الارض في نفسه
ونقسم على نصف طول الخشبة فاخرج فهو الذي ان نقصته من نصف طول الخشبة بقي ما بقي منها
قايما على وجه الارض وان زدته على نصف طول الخشبة اجتمع مقدار ما انكسر وانعطف الى
الارض فلتكن الخشبة كـ د قايمة على وجه الارض وهو آ ح وقد انكسرت على نقطة ب
وانعطفت ولم يبن احد قسميها من الاخر فبلغ راسها نقطة آ من الارض ونريد ان نعلم مقدار ح
فلندر على مثلث آ ح ا القايم زاوية ح دايرة ونصف قوس آ ح على د ونخرج منه عمود د ه على آ ب
وعمود د ط على آ ح فلان عمود د ط خارج من منتصف القوس عمودا على وترها فانه نصف الوتر
ويكون قطعة من القطر ولذلك يكون نقطة ح التي تقاطع عليها القطران مركز الدايرة ومثلثا د ه ح
آ ط ح المتناظرين قايمي زاويتي ه ط فهما متشابهان و د ح مساو ح ا فده مساو لا ط ونسبة آ ه
الذي هو نصف طول الخشبة الى ه د المساوي لا ط كنسبة ده الى
ه ب المطلوب فهو معلوم

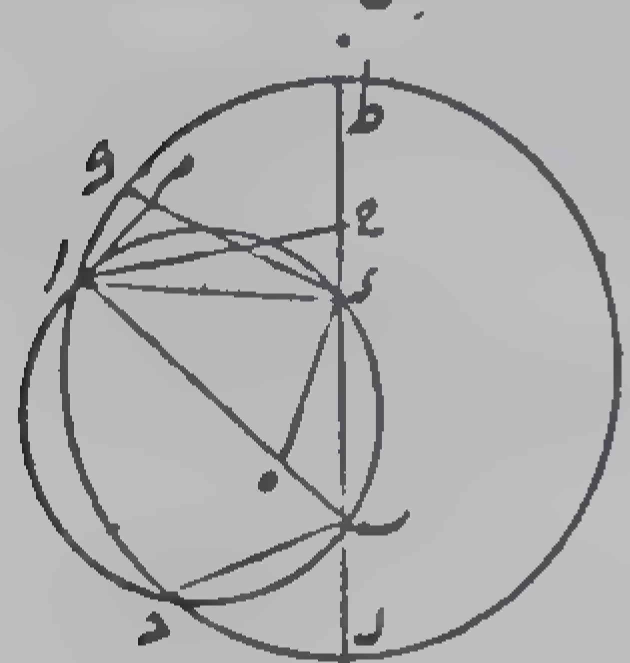


فاذا زدناه على آ ه اجتمع آ ب وهو ما انكسر من الخشبة واذا
نقصناه من آ ه اعني مجموع ح ب ب ه بقي ح وهو ما بقي منها
قايما على الارض وذلك ما اردناه

حل التعديل وتقطيعه لنصف الفلك الخارج
المركز في من كتابي المخصوص بهذا المعنى

لكن دايرة ا ح للفلك الخارج المركز على مركز د ولكن مركز الفلك المثل بفلك البروج نقطة ب والقطر
المار بكلى المركزين قطر ح د ر فيكون ح البعد الابعد و ر البعد الاقرب ونفرض الشمس على نقطة آ
فيكون آ ح الحصة ونزل عمود آ ح على القطر فيكون حب الحصة و ح د حب تمامها ونصل آ د آ ب و
معلوم ان زاوية ط د ا هي بمقدار الحصة وان زاوية ط ب ا بمقدار الحصة المقومة ولان زاوية ط د ا
الخارجة عن مثلث ا د ب مساوية لزاويتي د ب ا د ا ب فزاوية د ا ب هي فضل ما بين زاويتي ط د ا ط ب ا
لكن فضل ما بين الوسط والمقوم هو التعديل فزاوية د ا ب هي بمقدار تعديل الحصة ط ب ا ونريد ان
نعرفها فننزل عمود د ه على آ ب وندير على مثلث ا د ب دايرة محيط بها ونصل ح ولنقتصر على هذا
الوضع من اوضاع التعديل فان سايرها مقاسة عليه ونقول ـــــ ان من البين ان مربع

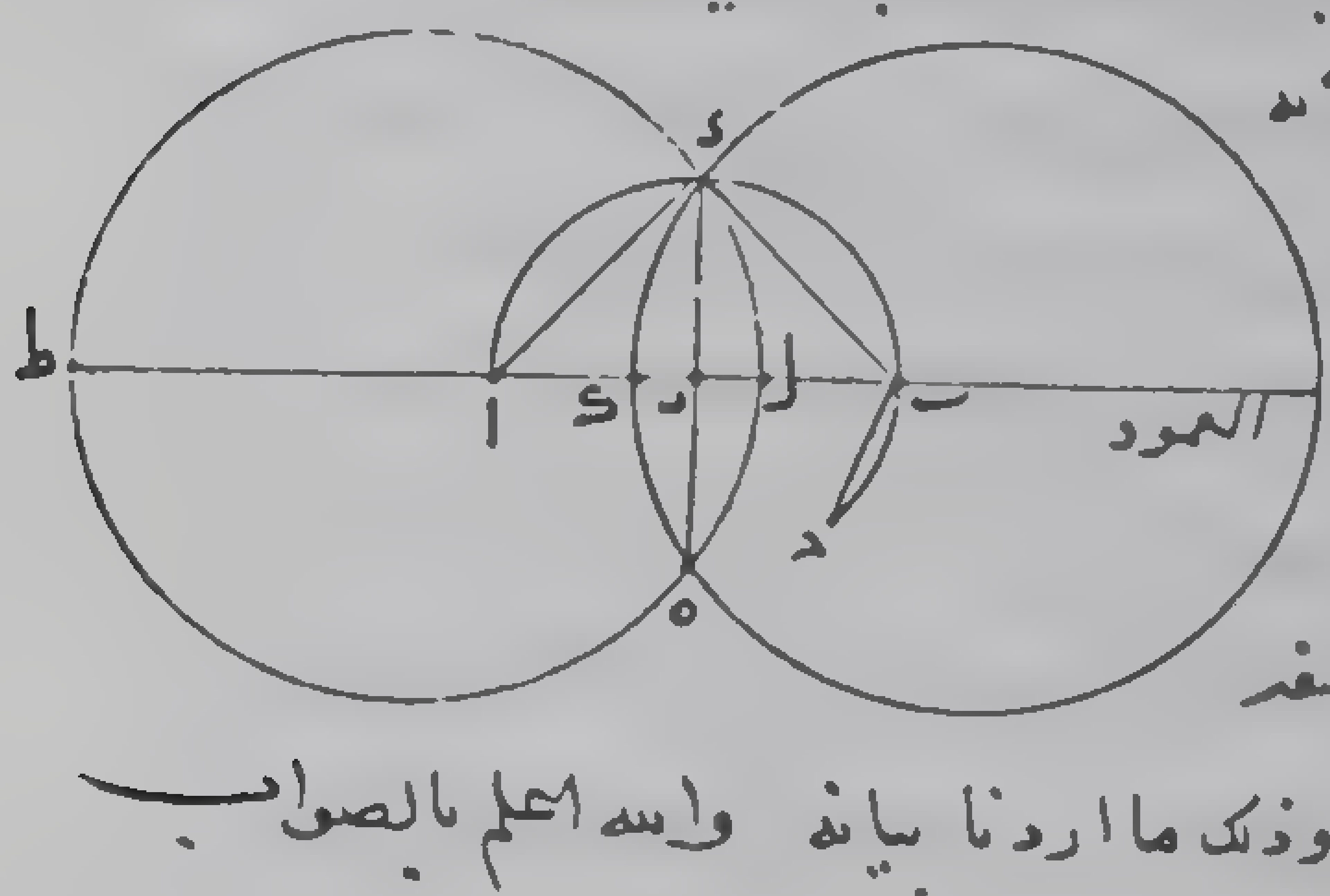
آب نفصل على مربعي آد دب بضعف ضرب بد في دح من اجل ان زاوية ادب منفرجة فمتى ضربنا ضعف جيب تمام الحصة وهو ح د في ضعف دب وهو جيب التعديل الاعظم وجمعنا ما بلغ الى مجموع مربعي آد الجيب كله ودب جيب التعديل الاعظم حصل مربع آب فاذا اخذنا جذره كان آب ولان خط آب منحني في قوس آح ودد نصفه عمود ده يكون مربع آد مساويا لمربع دب وضرب آب في بح فاذا القينا مربع دب جيب التعديل الاعظم من مربع دا الجيب كله بقي ضرب آب في بح فاذا قسمناه على آب خرج بح فاذا زدناه على آب واخذنا نصف الجملة كان آه واذا نقصنا بح من آب بقي ضعف بر لمي نصفناه ونقصنا مربعه من مربع دب بقي مربع ده وهو وتر زاوية التعديل في الدائرة التي يكون قطرها آد لكنا اذا اخرجنا دك



يوازي آب وآم عمودا على دك كان سطح المقدم متوازي الاضلاع قايم الزوايا وآم الذي هو جيب زاوية ادك يساوي ده وزاويتا ادك دآب لاجل التبادل متساويتان فده اذن جيب التعديل في الفلك الخارج المركز لحصة طا وآه جيب تمامه وذلك ما اردنا ان نبين معرفة القطعة المنكسفة من احد النيرين لحبش الحاسب من كتابه في المسائل المفيدة والجوابات السديدة في عمل زيج الخوارزمي

كلتن دايرة د طرل للكاسف على مركز آ ودايرة د كرح للمنكسف على مركز ب وقد حصل من الزيج قطرهاتين الدايرتين بمقدار الدواير العظام اعني الذي به الدايرة العظيمة على الكرة ثلثمايه وستون جزءا ونريد ان نعلم تكسير قطعة د كرل التي تستر من دايرة د طرل من دايرة د كرح بالمقدار الذي به تكسير جميع دايرة د كرح اثني عشر فنصل آد تد تر. آد آر ونخرج الخط المار على المركزين وهو طآح وهذه كلها قسي الا انا نستعملها استعمال الخطوط لصغر مقدارها بالاضافة الى دور الدايرة التي منها طآح فندير على مثلث ادب دايرة يحيط به ونأخذ منها قوس دلج مساوية لقوس آد ونصل كج فلان خط آج منحني في قوس ادج وقد نزل عليه من منتصف القوس وهو د عمود ده فانا اذا القينا مربع بد من مربع آد بقي ضرب آب في كج فاذا قسمناه على آب وهو عرض القمر في كسوف القمر والمحكم في كسوف الشمس خرج كج فاذا زدناه على

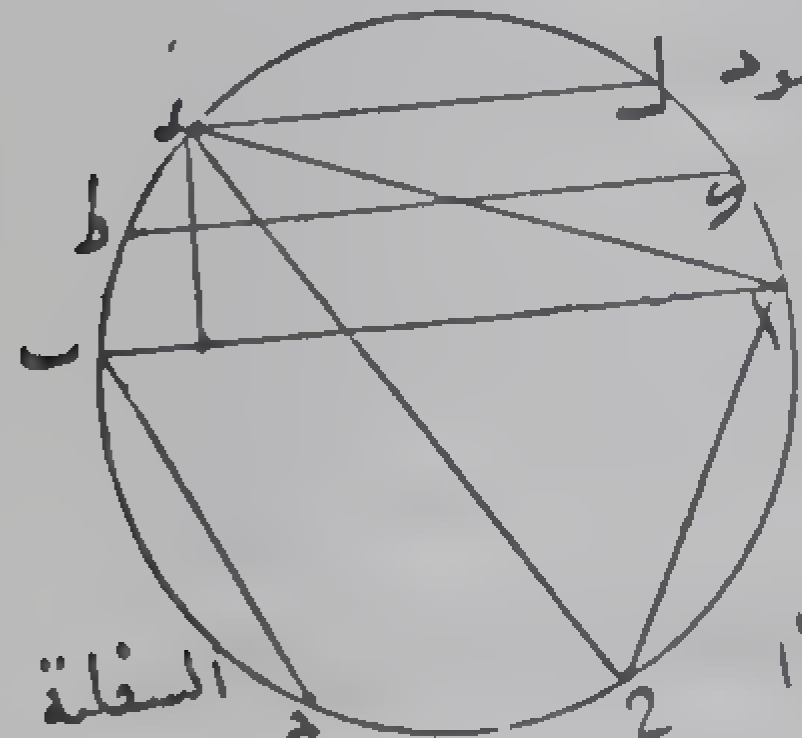
علی آب واخذنا نصف الجملة کان آه فاه هب معلومان وبین ان ضرب آه فی ه ط یساوی مربع هد
لکن هد اذا خرج لنا خرج بالمقدار الذی به حصل کل واحد من قطری الکاسف والمنکسف
ولیست لنا جیوب مقطوعة علی هذا المقدار حتی یمکنا منها معرفة وتر دل فلذلک یحتاج ان یحول هذا
السهم اعنی هد الی المقدار الذی به تبد الجیب کله بان نضربه فی آل ونقسم المبلغ علی الجیب کله فیخرج هد
بالمقدار المطلوب فنقوسه حینئذ فی جداول الجیوب فیخرج قوس دل بالمقدار الذی به دور الکاسف
ثلثمایة وستون جزءا ومتی عرفنا نسبة قوس دل الی دور دایرة الکاسف بذلک المقدار احتجنا
ان نعرف مقداره بالمقدار الاول الذی به عرفنا اولا مقدار قطر الکاسف ولان نسبة القطر الی الدور
نسبة واحد الی ثلثة وسبع نضرب طل فی ثلثة وسبع فیجتمع دور الکاسف ونسبة دل بهذا
المقدار وهو المطلوب الی دور الکاسف فهذا المقدار کنسبة دل بالمقدار الذی به دور الکاسف
ثلثمایة وستون جزءا الی جمیع دورها فاذا حصل المطلوب وهو دل ضربناه فی آل فاجتمع تکسیر
قطاع آدکر واذا ضربنا آه فی هد اجتمع تکسیر مثلث آدر وفضل ما بینه وبین تکسیر القطاع
هو مساحة قطعة دکره   به نستبین فی قوس دک وقطاع دکرب ومثلث دبا لعل المقد
حتی یحصل لنا مساحة قطعة دکره فمجموعها اعنی مساحة قطعتی الکاسف والمنکسف فیجتمع
مساحة القطعة المنکسفة الا انه بالمقدار الذی به ح ک قطر المنکسف العدد الاول الذی حصل
لنا من الزیج ویحتاج ان یحوله الی المقدار الذی به مساحة المنکسف کله اثنی عشر ولان نسبة الجزء
من الدایرة الی الجزء المتشابه له من الاخری کنسبة کل الدایرة الاولی الی کل الدایرة الاخری ونسب
الدوایر بعضها الی بعض علی نسب مربعات اقطارها فنسبة تکسیر القطعة المنکسفة بالمقدار



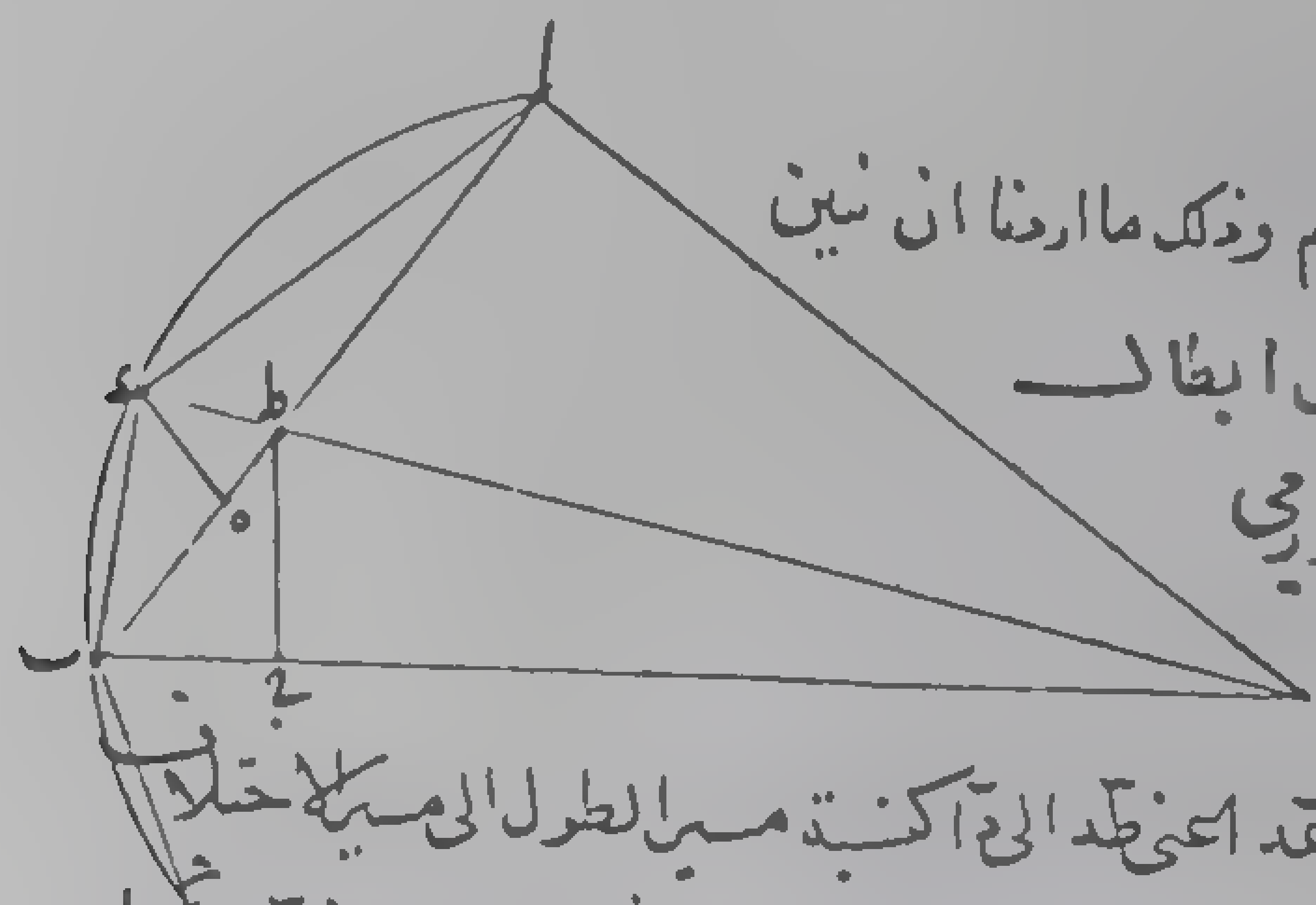
الذی حصل لنا الی تکسیرها بالمقدار الذی به مساحة جرم المنکسف اثنا عشر کنسبة مربع قطر المنکسف علی ما حصل لنا من الزیج الی مایة واربعة واربعون لمساحة القطعة المنکسفة
معلومة علی ما طلبناها به وذلک ما اردنا بیانه والله اعلم بالصواب

برهان عمل جيب الصباح في رصد الشمس

لتكن دايرة آبج داية سعة المشرق وفيها اوتار كد كط آب موازية معلومة وهي اضعاف جيوب سعة مشارق الشمس على طرفي مدتين متساويتين ومطلوبه قطر الداية فنصل آد فيكون مساويا لوتر كط لان كد مع كط ... المتساويين وضا نسب تساوي المدتين مساوٍ لكد مع كط المتساوين ونجعل قوس دج مساوية لقوس دا ونصل آج فيكون مساويا لكد ولان مربع آد ونسميه المحفوظ الثاني مساو لمربع دب الوتر وضرب آب المحفوظ الثالث في آج المحفوظ الاول فدب الوتر معلوم ونخرج عمود دة فيكون معلوما لان دب الوتر معلوم وهب نصف آب كد ونخرج قطر دح ونصل آج ولان زاويتي دب دح امساوتان لكونهما على قوس آد وزاويتا داح دهب قايمتان فان مثلثي دهب داح متشابهان ونسبة دب الوتر الى دة العمود كنسبة دح القطر الى آد المحفوظ الثاني فقطر دح معلوم وهو جيب سعة المشرق الكلي بحسب موضعه وذلك ما اردنا بيانه منه ثم اذا احوج اليها معرفة الابعاد لي في مقالتي في دلالة الاثار العلوية على الاحداث



مثلثا آب تد فايمي زاويتي آد وهما معًا على قاعدة دب وتداخرج عمود دط على دب من نقطة تقاطع آد دب كيف نعلم دط من قبل اضلاع المثلث المعلومة فنصل آد فيكون معلوما من جهة ان ذا اربعة اضلاع آدبر مما يحيط به داية لان دب يوتر كل واحدة من زاويتي المثلثين القائمتين فهو بعينه قطر للداية المحيطة بكل واحد منهما وضرب آب المعلوم في دد المعلوم مساوٍ لمجموع ضرب آر المعلوم في دب المعلوم وضرب آد المجهول في دب المعلوم ثم نديرعلى مثلث آدب داية محيط به ونفرز قوس دج مساوية لقوس آد وننزل عمود دة على آب فيكون خط آج منحنيا في قوس آج وعمود دة يقسمه بنصفين ولذلك يكون مربع آد المعلوم مساويا لضرب آب المعلوم في آج المجهول ومربع بد المعلوم فبح معلوم وآه هب لذلك معلومان ولان زاوية دط قايمة ودة عمود على بط يكون ضرب به في هط مساويا لمربع دة فمتى قسمنا مربع دة على هب خرج هط فيصير بط كله معلوما ونسبة طب المعلوم الى طح المطلوب كنسبة



كنسبة زب المعلوم الى زا المعلوم فزح معلوم وذلك ما اردنا ان نبين

معرفة قوس رجوع الكواكب من كتابي في ابطال

البهتان بايراد البرهان على اعمال الخوارزمي

لتكن دائرة ستعد فلك تدوير الكوكب

على مركز ب و آ مركز العالم ونسبة نصف قطر اعني طه الى آ كنسبة مسير الطول الى مسير الاختلاف

ولتكن نقطة د موضع المقام وقد نصف قوس الرجوع ولما استخرج بطلميوس كل واحد من آد دط

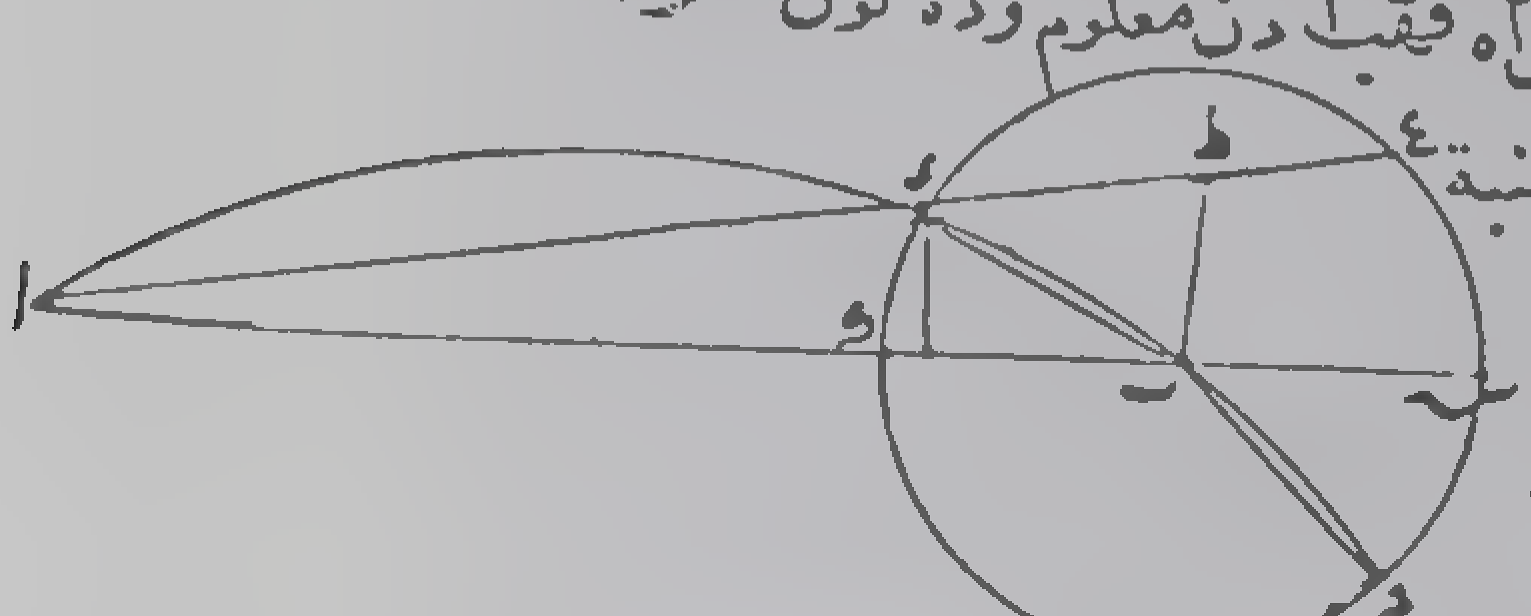
باقسام آب الستين بشكلي في معرفة زاوية دب ط طريقته في جميع اعمال كتاب المجسطي وانا قد

ادرت على صلع آدب دائرة وافرزت منها دح مساوية لآد ووصلت بح واخرجت عمود ده

آح خط منحني في قوس آدح تكون مربع آد المعلوم مساويا لمربع بد نصف قطر فلك التدوير وضرب

آب الذي هو ستون في بح المجهول فاذا القينا مربع بد من مربع آد بقي ضرب آب في بح فاذا قسمنا ذلك

على آب خرج بح فاذا زدناه على آب ونصفنا الجملة حصل آه فيبقى ذن معلوم وده يكون معلوما



باجزاء آب ونسبة ده بهذا المقدار الى دب بهذا المقدار كنسبة

ده بالمقدار الذي به دب الجيب كله الى دب بالجيب كله

فاذا حولناه وقوسناه خرج قوس دك المطلوبة وذلك

ما اردنا ان نبين ## وقد تمكن الى وجود المطلوب

سلوك طريق اسهل من الذي سلك في الوقت الا ان لغرض في صرفها الى امر واحد هو الامانة

عن عمل الخاصيتين المذكورتين من هذه الصناعة والارشاد الى كيفية التصرف فيهما

استعمال خاصية الخط المنحني في استخراج اوتار القسي في الدائرة المعلومة القطر

واذ قد تقدم ذكر ما وقع به الوعد في اول الكلام فاني اعود الى اتمام الاعداد واقول ـــــ

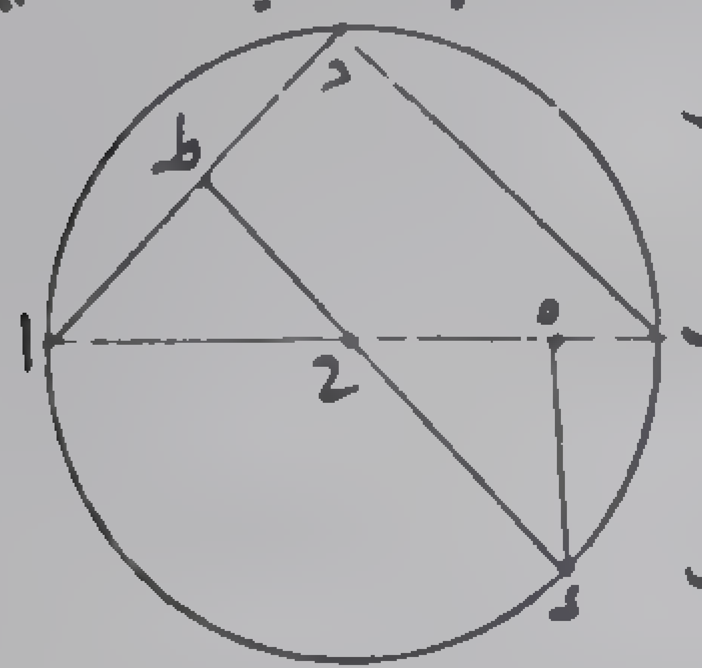
معرفة وتر تمام كل قوس معلومة

الوتر الى نصف الدائرة لى ٥

كل قوس معلومة الوتر فان وتر تمامها الى نصف الدائرة معلوم من اجل ان وتر آح معلوم

وقطر الدائرة وهو آب معلوم فاقول ان وتر آه معلوم فلنصف للبرهان على ذلك قوس آح على نقطة د

وينزل من منتصف ذلك عمود ده على اب وعمود حط على اج فلنثل ما نبين في مسيله الخشبية بنصف
عمود دح حط وتر اج اذ هو نازل من منتصف القوس ويكون نقطة ح مركز الدايرة ويساوي مثلثا
هدح طاح المتشابهان فيكون هد اط متساويان ولان ده عمود على قطر اب فان نسبة اه الذي هو
نصف مجموع قطر اب ووتر اج الى هد المساوي لطا كنسبة ده الى هب



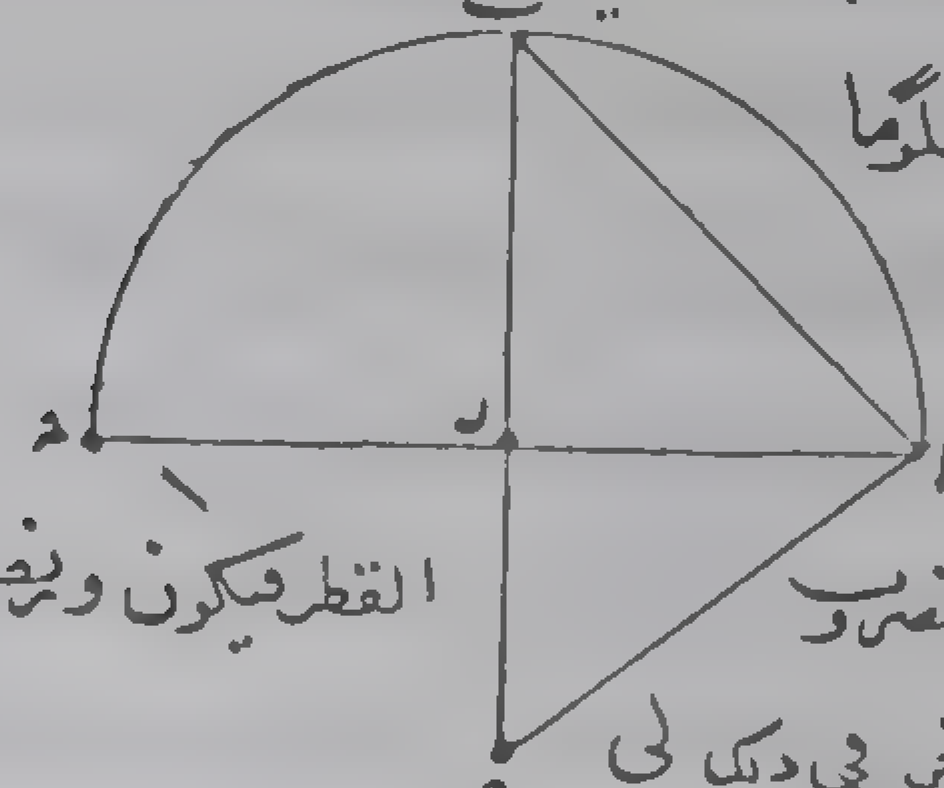
الذي هو فضل ما بين نصف مجموع القطر والوتر وبين القطر فاط
الذي هو نصف المطلوب معلوم وذلك ما اردناه
وحساب هذا مع طوله اسهل من اسقاط مربع جه من مربع اب
واخذ جذر الباقي وذلك انا نجمع القطر والوتر ونضرب نصف الجملة في فضل القطر على هذا
النصف وناخذ جذر المبلغ فنضعفه فيكون وتر تمام قوس الوتر المعلوم الى نصف الداير
معرفة وتر ضعف كل قوس معلومة الوتر لي

كل قوس معلومة الوتر في داير معلومة القطر فان وتر ضعفها معلوم مثاله ان وتر اب
معلوم وقوس بج تساوي قوس اب والمطلوب اج فلنخرج نصف قطر زه ونصل اه فلان مربع اه

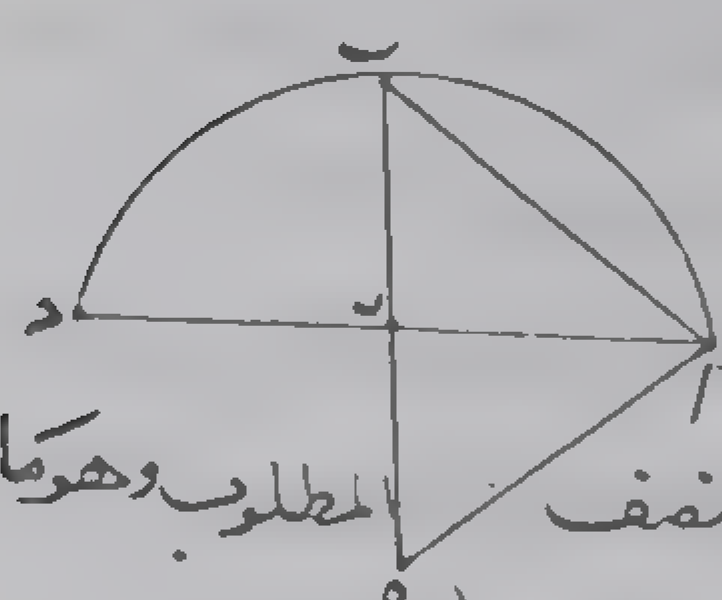


ينقص عن مربعي اب به بضعف ضرب هب في بز لكن اه هب
متساويان فمربع اب يساوي ضعف ضرب هب في بز فبز معلوم
وهو باقي نصف وتر تمام اج الى نصف القطر حسابه نضرب
في نفسه ونقسم نصف ما بلغ على نصف القطر فاخرج ملقيه من نصف
بين ونضربه في نفسه ونسقط ما اجتمع من مضروب القطر في نفسه وناخذ جذر ما بقي فيكون
وتر ضعف قوس الوتر المفروض طريق آخر في ذلك لي
وهو ان نخرج عمود حج على اب فزاويتا ار حه متساويتان وزاويتا ح ر قائمتان فمثلثا ار
بحج متشابهان فنسبة اب الى ار كنسبة بر الى حج فار معلوم وضعفه اج فهو معلوم
حسابه نضرب الوتر المعلوم في نفسه ونلقي ما اجتمع من مضروب القطر في نفسه وناخذ جذر
ربع ما بقي فنضربه في الوتر المعلوم ونقسم المبلغ على نصف القطر فما خرج من القسمة نضعفه
فيحصل وتر ضعف قوس الوتر المفروض معرفة وتر نصف كل قوس معلومة الوتر لي

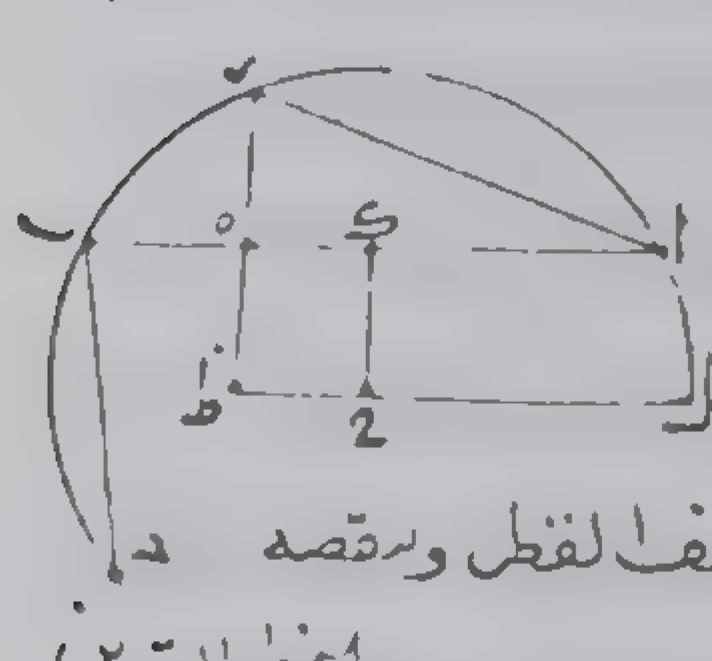
شكل قوس معلومة الوتر في دائرة معلومة القطر بان وتر نصفها معلوم مثاله ان وتر اج
معلوم وقوس اب مساوية لقوس بج فاقول ان وتر اب معلوم وذلك انا نخرج نصف قطر زه
ونصل اه فلان مربع اب المطلوب ينقص عن مربع اه بمربع المعلومين وضعف ضرب تر المعلوم



في هز نصف وتر تمام اج الى نصف الدائرة يكون اب معلوما
حسابه نضرب الوتر المعلوم في نفسه ويلقى ما اجتمع
من مضروب القطر في نفسه وناخذ جذر ربع ما
بقي فنضربه في نصف القطر ونزيد على ما اجتمع مضروب
القطر فيكون وتر نصف
القوس المعلومة الوتر طريق اخر في ذلك لي
وهو ان زه نصف وتر تمام اج الى نصف الدائرة يكون تر باقية من نصف القطر واب نقوي

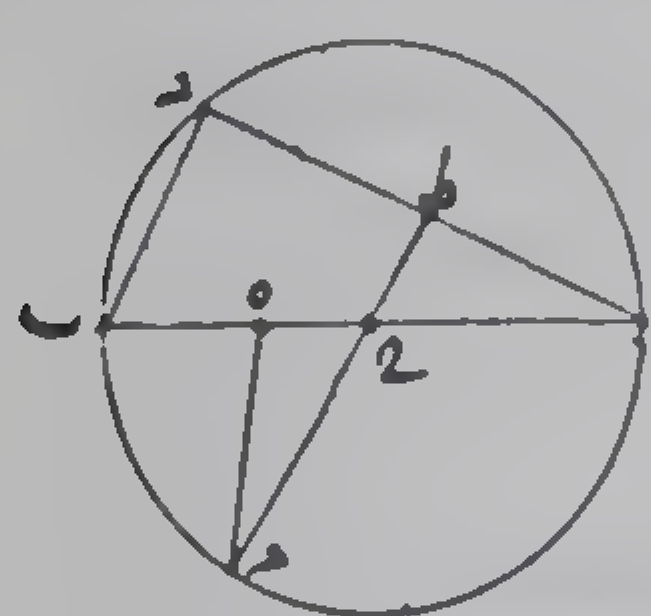


على اد وتر اب فهو معلوم حسابه نضرب الوتر المعلوم في نفسه
ويلقى ما اجتمع من مضروب القطر في نفسه وينقص جذر
ما بقي من القطر فما بقي نضربه في نفسه ونزيد المبلغ على مضروب
نصف الوتر المعلوم في نفسه فما بلغ ناخذ جذره فيكون وتر النصف المطلوب وهو ما
اردنا معرفة وتر نصف مجموع قوسين معلومي الوترين لي
شكل قوسين معلومتي الوترين فان وتر نصف مجموعهما معلوم مثاله ان وتري اب جد
معلومان وقوس اد مساوية لقوس بج اقول ان وتر اد معلوم برهانه
انا نخرج عمود ده على اب ونخرج من المركز وهو ح عمودي حط حك فظاهر ان خط نصف
وتر تمام اب الى نصف الدائرة وهط مساويه واه هو نصف مجموع اب جد فتكون هو مساو

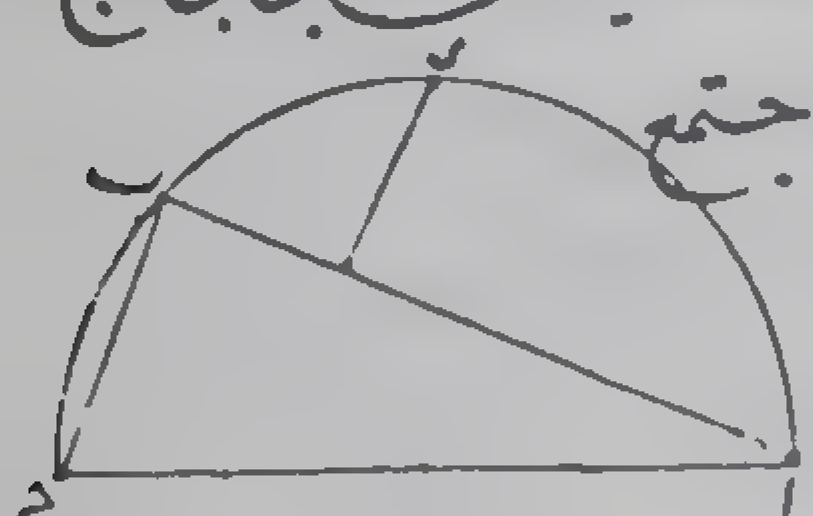


لنصف جد اذ هو مساو لنصف الوتر الخارج من نقطة د على موازاة
وتر اب ونخرج طح على استقامته فمن نضرب اك في باقيه
من الخط مساو لربع جد فاذا اسقط منه طه بقي هد معلوما
واه معلوم فاد معلوم حسابه نزيد نصف صغرى الوترين على نصف القطر وننقصه
ايضا منه ثم ننقص الزائد في الناقص ونحفظ جذر المجتمع ونسقط مضروب اعظم الوترين

في نفسه من مضروب القطر في نفسه ونأخذ جذر ربع ما بقي ونلقيه من المحفوظ ثم نضرب الباقي
في نفسه ونزيده على مضروب نصف مجموع الوترين في نفسه ونأخذ جذر الجملة فيكون وتر نصف
مجموع القوسين المعلومتي الوترين معرفة وتر تمام قوس معلومة الوتر الى نصف دايرة
اذا كان مجموع قطر الدايرة ووتر التمام معلومًا وكل واحد منهما بانفراده مجهولا لي
هذا راجع الى مسئلة الخشبة المقدمة فليكن آج معلوم الوتر ومجموع وتر تمامه الى نصف
الدايرة وهو جب مع قطرها معلوم لكن كل واحد من آب بج بانفراده مجهول فلنصف لذلك قوس آج
على نقطة د ونترك منها عمود ده على آب وعمود دح ط على آج وقد بين فيما تقدم ان نقطة ح

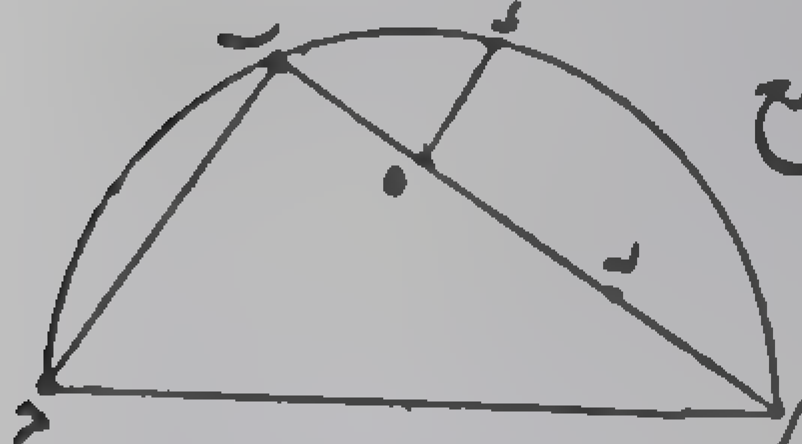


مركز الدايرة وان آط مساوي ده ولسه آه الذي هو نصف مجموع
قطر آب ووتر بج الى ده المساوي لنصف آج كنسبة ده الى هب
فاذا زدنا هب على آه اجتمع القطر واذا نقصنا منه حصل الوتر
وذلك ما اردناه حسابه نضرب نصف الوتر المعلوم في نفسه
ونقسم ما بلغ على نصف مجموع القطر ووتر تمام قوس الوتر المعلوم فما خرج فهو الذي ان زدناه
على ذلك النصف المقسوم عليه اجتمع القطر وان نقصناه منه حصل وتر تمام قوس الوتر المعلوم
الى نصف الدايرة معرفة وتر القوس ووتر تمامها الى نصف الدايرة المعلومة
القطر اذا كان الوتران بمجموعهما معلومين وبالتفصيل مجهولين
فليكن في المثال قطر آج معلومًا ومجموع وتري آب بج معلوم ونريد ان نعلم كل واحد من
هذين الوترين بانفراده فلنصف قوس آج على نقطة د ونترك عمود ده على آب فلان خط آج
منقسم بنصفين على ح وبقسمين مختلفين على ب يكون مجموع مربعي آب بج مساويا لضعف مربع
آه وضعف مربع هب لكن آج تقوى على آب بج فاذا القينا من مربع آج نصفه كان ما بقي مساويا لمجموع
مربعي آه هب لان مربع آه معلوم لان آه نصف آج المعلوم فاذا القينا من ذلك الباقي بقي مربع هب
وهب معلوم فان زدناه على آه الذي هو نصف مجموع آب بج اجتمع

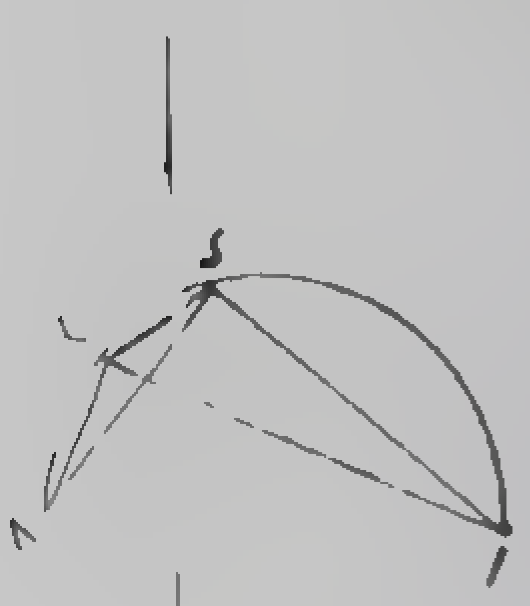


آب وان نقصناه منه بقي بج وذلك ما اردناه حسابه
نضرب نصف مجموع ذينك الوترين في نفسه ونلقي ما اجتمع

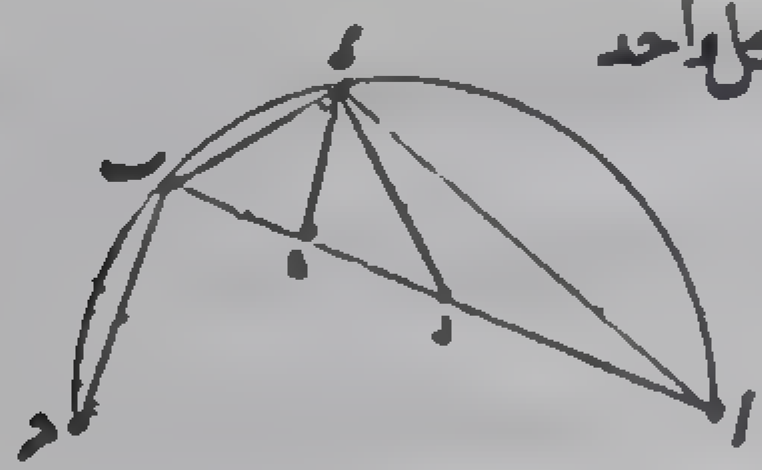
اجتمع من نصف مضروب القطر فی نفسه ویاخذ جذر ما بقی فان اردنا الوتر الاطول زدنا هذا
البدر علی نصف مجموع الوترین فیجتمع الوتر الاطول وان اردنا الوتر الاقصر نقصنا هذا الجذر من نصف
مجموعها فیحصل الوتر الاقصر وجه اخر فی معرفة ذلک لی
لعموز عراه هو مساویا لکب وسوا ز مساویا لج فخط بز منقسم بنصفین علی ح وقد زید فیه آد
یکون مجموع مربعی با آز اعنی مربع آح مساویا لضعف مربعی به ها فمتی القینا من مربع آح ضعف مربع



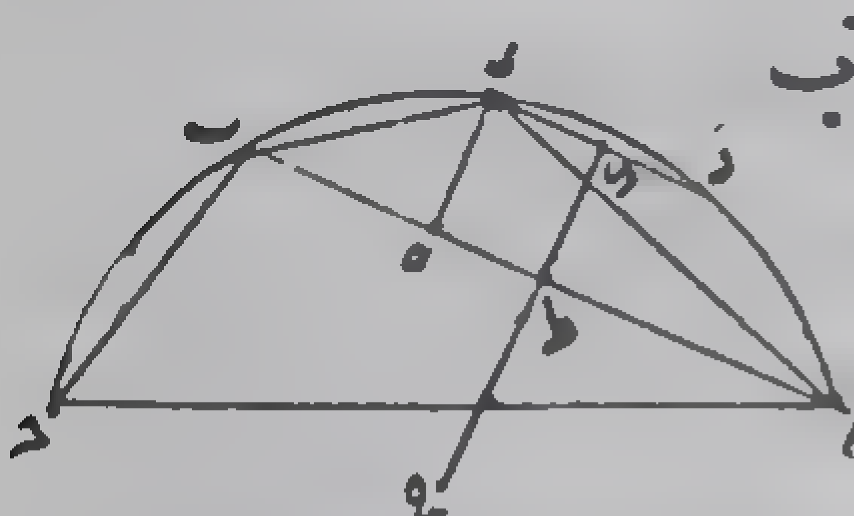
آه المعلوم بقی ضعف مربع هب فهب معلوم فان زدناه علی آه اجتمع
وتر آب وان نقصناه منه بقی آز المساوی لج واذا استعملنا انصاف
ما استعملناه حف علینا العمل لان نصا علی نسبة الاضعاف
وحسابه کما تقدم بعینه معرفة وتر فضل ما بین قوسین معلومتی الوتر من قبل
وتر مجموعهما ومعرفة وتر مجموعهما من قبل وتر تفاضلهما لابی نصر بن عراق
قال لیکن وترا آد دب معلومین ونجعل وتر دح مساویا لوتر آد ونصل آب فیکون وتر حج وتر
تفاضل ما بین قوسی آد دب ویکون آب وتر مجموعهما فان کان حج وتر التفاضل معلوما واردنا معرفة
آب وتر المجموع فمن المعلوم ان مربع آد المعلوم یساوی ضرب آب المطلوب فی حج المعلوم مع مربع
دب المعلوم فاذا القینا مربع دب من مربع آد بقی ضرب آب فی حج وحج معلوم فآب معلوم وذلک
ما اردناه حسابه نضرب کل واحد من الوترین فی نفسه ویاخذ فضل ما بین ما یجتمع من
کل واحد منهما فنقسمه علی وتر فضل ما بین قوسیهما فیخرج وتر المجموع وهو آب



وان کان آب معلوما واردنا معرفة حج وتر التفاضل فعلی مقتضی ما تقدم وذلک لان مربع آد
یساوی مربع دب وضرب آب المعلوم فی حج المجهول حسابه نفضل نضرب کل واحد من الوترین
فی نفسه ویاخذ فضل ما بین المجتمعین فنقسمه علی وتر مجموع قوسیهما فیخرج وتر التفاضل
معرفة وتر المجموع ووتر التفاضل بعضها من بعض
لیکن وترا آد دب معلومین ووتر مجموع قوسیهما وهو آب معلوم ونرید معرفة وتر فضل ما
بین قوسیهما وهو حج فلننزل عمود ده علی آب فلان مربع آد ینقص عن مربعی دب آب بضعف
ضرب آب فی به فان نصف فضل ما بین مربعی آد دب اذا قسم علی آب خرج به وهو نصف



فضل ما بين وتر المجموع ووتر الفاضل حسابه نضرب كل واحد
من الوترين في نفسه ونقص اقل ما يجتمع من اكبرهما و
نقسم نصف ما بقي على وتر مجموع قوسيهما فاخرج ملقى
ضعفه من وتر المجموع فبقي وتر الفاضل وان كان وتر آج الذي للفاضل معلوما واردنا
معرفة آب وتر مجموع قوسيهما فانا نفصل هج مساويا لهب ونصل دز فيكون دز دب متساويان
ومربع آد نفضل على مربع زد تا نصرب آز في دب اعني ضعف ضرب آز في زة لكن آز مساو لجه
ودب معلوم حسابه نضرب كل واحد من الوتر الانقص ووتر الفاضل في نفسه ونجمعهما و
نلقي المبلغ من مضروب الوتر الاطول في نفسه ونقسم ما بقي على وتر الفاضل فاخرج زيده
على وتر الفاضل فيجتمع وتر مجموع قوسيهما
معرفة وتر المجموع ووتر الفاضل كل واحد منهما بذاته من غير ان يحتاج احدهما الى الآخر لي
يكن وترا آب آج معلومين ونخرج دز موازيا لآب فيكون مساويا لجه وننزل عمود ده من منتصف
قوس آج على آب فاما المعرفة وتر فضل ما بين قوسيهما فانا نخرج من مركز الدائرة وهو ح عمود
حطك على زد ومعلوم ان ما بين قوسي آب آج اعني زد مجموع قوسي زد دا ولان حك هو
نصف وتر تمام زدا اعني آج المعلوم وح ط نصف وتر تمام آب.



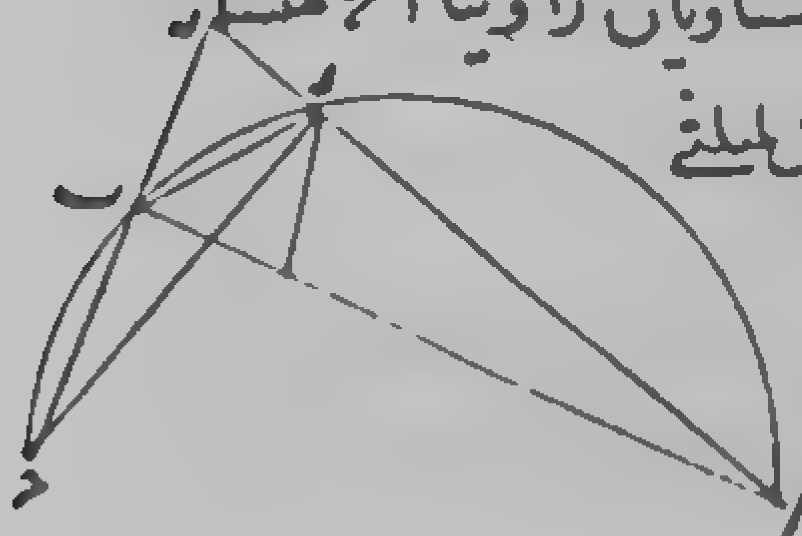
المعلوم ففضل ما بينهما وهو كط معلوم ودة تساويه
وهب هو فضل الوتر الاطول على نصف مجموعهما ودب
القوي عليهما معلوم فوتر ضعفه معلوم وذلك ما اردناه. حسابه نسقط مضروب
كل واحد من الوترين في نفسه من مضروب القطر في نفسه ونأخذ جذر ربع كل واحد
من الباقيين ونضرب فضل ما بين الجذرين في نفسه ونجمع المبلغ الى مضروب فضل الوتر
الاطول على نصف مجموع الوترين في نفسه ونقسم ما يجتمع على القطر فاخرج ملقى من القطر
ثم نضرب ما بقي في نفسه ونلقيه من مضروب القطر في نفسه ونأخذ جذر ما بقي فيكون وتر
الفاضل واما المعرفة وتر مجموع قوسيهما وهو آد فان دة اذا صار معلوما كان آد ايضا معلوما
لانه تقوى عليه وعلى آة الذي هو نصف مجموع الوترين واذا صار آد معلوما كان آج وتر ضعفه

ضعف قوسه فهو ایضا معلوم حسابه مثل فی ذلک ما مر فی حساب معرفة وتر الفاضل
حتی یحصل لنا فضل ما بین الحدین مضروبا فی نفسه و نزید علیه مضروب نصف مجموع الوترین
فی نفسه و نقسم ما اجتمع علی القطر فاخرج فلنقیه من نصف القطر و نضعف القطر و نضعف
الباقی و نضرب ذلک الضعف فی نفسه و نلقیه من مضروب القطر فی نفسه و ناخذ جذر
ما بقی فیکون وتر مجموع تینک القوسین المعلومتی الوترین

معرفة وتر الفاضل و وتر المجموع کل واحد منهما

بذا تر لابی نصر بن عراق فی کتابه الموسوم بالمجسطی الشاهی

قال کل قوسین معلومی الوترین فان وتر فضل ما بینهما معلوم و وتر مجموعهما معلوم مثاله
وترا آد دب فی دایرة آدح معلومان فاقول ان وتر تفاضل قوسیهما و وتر مجموعهما
معلوم برهانه انا ناخذ قوس دح مساویة لقوس آد و نخرج حب علی استقامته من نقطة ت
و ننزل علیه من نقطة د عمود دز فلان دب معلوم و نسبة دب الی بز کنسبة القطر الی وتر تمام آد
لان زاویة دبز بمقدار قوس آد و زاویة دزب قایمة و اذا اخرج من نقطة آ قطر الدایرة واخرج
وتر تمام آد بین ان المثلث الحادث من القطر و وتر آد و وتر تمامه متشابه لمثلث دزب فان
نسبة القطر الی دب معلومة وایضا نسبة مربع جد الی مربع تد معلومة فنسبته الی الزیادة
معلومة وزیادة مربع جد علی مربع تد هو زیادة مربع حد الی مربع تز فنسبة مربع جد الی کل واحد
من مربعی حز تز معلومة و نسبة القطر الی تد قد فرضت معلومة فنسبة القطر الی کل واحد
من تز حز معلومة فیبقی تح معلوما و نصل ایضا آب و ننزل علیه من نقطة ح عمود ده فلان نسبة
آد الی آه کنسبة القطر الی وتر تمام تد یکون نسبة آد الی آه معلومة وایضا نسبة تد الی ته
کنسبة القطر الی وتر تمام آد یکون نسبة تد الی هب معلومة فنسبة القطر الی کل واحد
من آه به معلومة فنسبته الی مجموعهما معلومة وایضا لان آد تد متساویان زاویتا آ ح متساویتان
ولذلک زاویتا زه متساویتان یکون آه مساویا لحد ولان تد مشترک للمثلثی

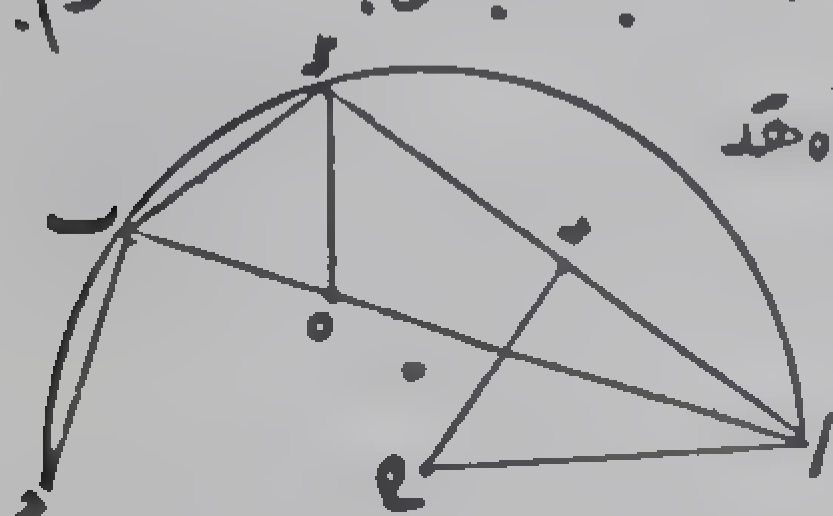


دبه دحه وزاویتا دبه دحه متساویتان یکون به مساویا لهح
فتبین ان فضل آه علی ته یکون مساویا لتح و ذلک ما اردنا ان نبین

حساب ذلک لوتر الفاضل نضرب الوتر الاقصر فی وتر تمام قوس الاطول الی نصف الدایرة ونقسم
المجتمع علی القطر فیخرج المحفوظ الاول ثم نضرب کل واحد من الوترین فی نفسه وناخذ فضل
ما بین المجتمعین علی مضروب المحفوظ الاول فی نفسه وناخذ جذر الجملة ونلقی منه المحفوظ الاول
فیبقی وتر الفاضل حساب ذلک لوتر المجموع نضرب الوتر الاطول فی وتر تمام قوس الاقصر الی نصف
دایرة ونقسم المجتمع علی القطر فیخرج المحفوظ الثانی فمتی جمعنا المحفوظین الاول والثانی کانت
الجملة وتر مجموع القوسین ومتی نقصنا احدهما من الاخر کان الباقی وتر الفاضل القوسین وذلک ما اردنا

معرفة وتر الفاضل ووتر المجموع کل واحد منهما بذاته
لطریق شبیه بالذی تقدم لابی نصر منصور بن علی بن عراق

وتر اد دب هما المعلومان ووتر اح تساوی قوس دح فوتر المجموع اب ووتر الفاضل بح ولنخرج
من المرکز وهو ح عمود ح ز علی اد ونصل اح فتکون زاویتا اح د د ب ا متساویتان لان زاویة د ب ا
مرکبة علی قوس اد من المحیط وزاویة اح ز علی نصفها من المرکز متشابه مثلثا ا ز ح هـ ب د فنسبة
اح نصف القطر الی ح ز نصف وتر تمام قوس اد الی نصف الدایرة کنسبة د ب الی ب هـ فـ ب هـ معلوم.

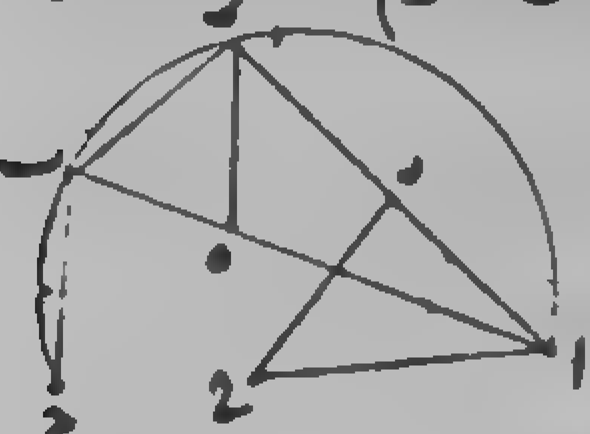


ود ب تقوی علی د هـ ب هـ فـ د هـ ایضا معلوم ود ب تقوی علی اه هـ د
فـ اه معلوم فاذا جمعنا اه هـ ب اجتمع وتر المجموع واذا نقصنا
هـ ب من اه بقی وتر الفاضل حسابه نضرب نصف وتر
تمام قوس الوتر الاطول الی نصف الدایرة فی الوتر الاقصر ونقسم المجتمع علی نصف القطر فیخرج المحفوظ
الاول ونضرب هذا المحفوظ الاول فی نفسه ونلقی المبلغ من مضروب الوتر الاقصر فی نفسه
وناخذ جذر ما بقی فهو المحفوظ الثانی ونضرب هذا المحفوظ الثانی فی نفسه ونلقی ما اجتمع
من مضروب الوتر الاطول فی نفسه وناخذ جذر ما بقی فان جمعنا هذا الجذر والمحفوظ الاول
اجتمع وتر المجموع وان نقصنا المحفوظ الاول من هذا الجذر بقی وتر الفاضل وذلک ما اردنا.

معرفة وتر المجموع ووتر الفاضل
لی فی علل زیج حبش

کل قوسین معلومتی الوتر فی دایرة معلومة القطر فان کل واحد من وتر مجموعهما ووتر فضل ما

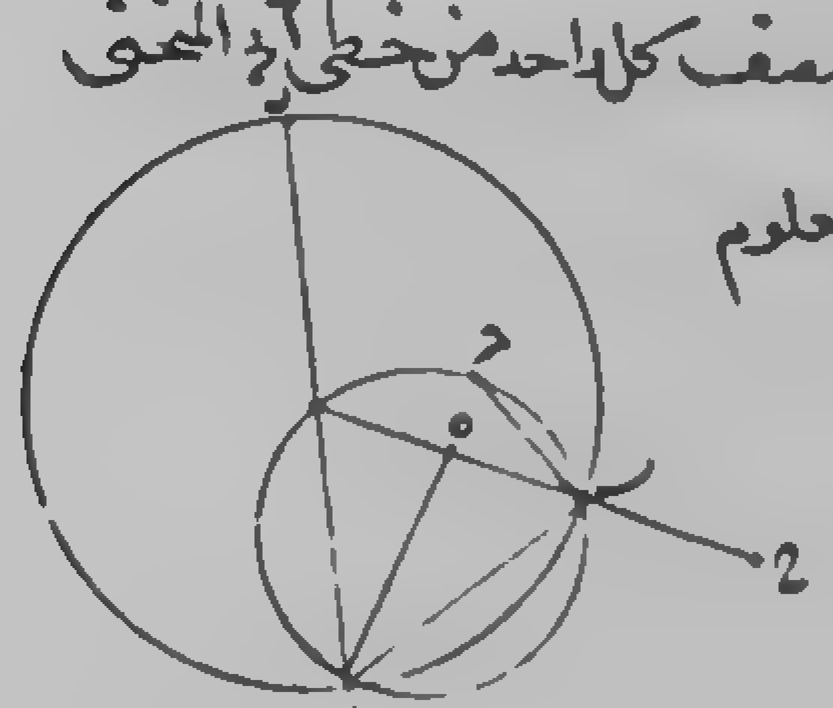
ما بينهما معلوم مثاله قوسا آد دب معلومتا الوتر في دايرة معلومة القطر ونصل آب فيكون وتر
مجموعهما ثم نفرض قوس دج مساوية لقوس آد ونصل آج فيكون وتر ما بين قوسي آد دب فاقول
ان كل واحد من آب آج معلوم برهانه انا نخرج من المركز وهو ح عمود دح على آد ومنه
عمود ده على آب ونصل آج فلان زاوية اح د على نصف القوس التي عليها زاوية دب ه يكونان متساويين
ويتشابه مثلثا ازح دبه العايمي الزاوية فيكون نسبة آز الى آح كنسبة ده الى دب فيكون ده معلوما
ودب يعري على ده هب فهب معلوم وآد يعري على ده ها فها معلوم فآب الذي هو مجموع آه هب
معلوم وده نصف خط آج المنحني يفضل ما بين آه هب اذن مساوي آج فهو معلوم ووجه حسابه



ان نضرب الوتر الاقصر في نصف الوتر الاطول ونقسم المبلغ على نصف القطر
فيخرج العمود ونسقط مضروب العمود في نفسه من كل واحد من مضروبي
الوترين كل واحد على حده في نفسه ونوجد جذر البقيتين
فان جمعا اجتمع وتر مجموع القوسين وان اخذ فضل ما بينهما كان مساويا لوتر فضل ما بينهما وقد استبان
ان لوتر المجموع ووتر الفاضل اشتراكا في الاسم وذلك ان وتر دب وتر تفاضل ما بين قوسي آد دب
وهو بعينه اعني دب وتر مجموع قوسي آد اجب فلذلك يسهل معرفة احدهما بالطريق التي سنحت و
سيسنح منها علم الامر بذلك الطريق ويمكن استخراج امهات الاوتار بهذه الخاصية على مثال
استخراجنا لها في علل زيج حبش وانا احكيها هاهنا فان الموضع لا يليق به

استخراج وتر المثمن في الدايرة المعلومة القطر

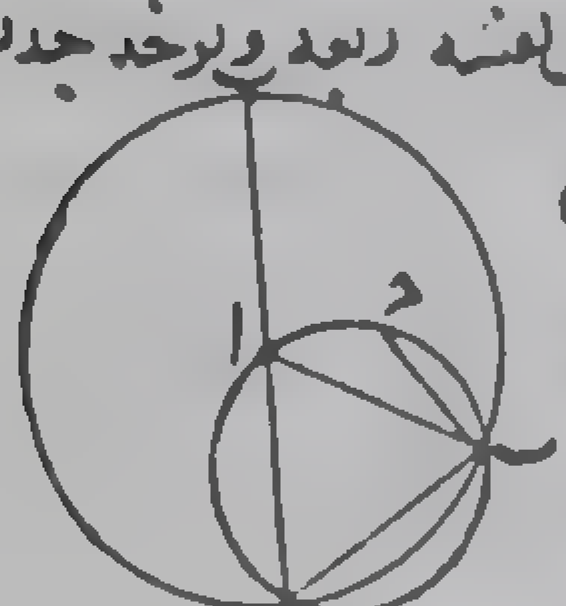
فليكن تد من محيط دايرة دب د المعلومة القطر ونصل دب فيكون وتر الثمن فاقول انه معلوم
برهانه انا نخرج قطر دآ ونكن المركز آ ونصل آب ونخرج عمود ده على آب ونديره على مثلث آدب
دايرة ونفصل قوس دج منها مساوية لقوس آد ولان ده نصف وتر ضعف الثمن فانه نصف وتر
الربع وزاوية داب من اربع زوايا قايمة فهي اذن نصف قايمة وزاوية آهد قايمة فتبقى زاوية اده
نصف قايمة فخطا آه هد متساويان وكل واحد منهما نصف وتر الربع ونخرج آب على استقامته
حتى يصير هج مساويا لها فمعلوم ان آح دج متساويان لان عمود ده منصف كل واحد من خطي آج المنحني
وآح المستقيم ومربع اد مساو لمربع دب المطلوب وضرب اب المعلوم



فی تح المنحنی تح فذلك اذن معلوم وحسابه ان یلقی نصف القطر من ضعف وتر الربع ویضرب الباقی
فی نصف القطر ویسقط المبلغ من مضروب نصف القطر فی نفسه ویوخذ جذر الباقی فیکون وتر الثمن
وسواء استخرجناه بهذا الطریق او من وتر الربع تمام تقدم فی معرفة وتر نصف کل قوس معلومة الوتر

استخراج وتر العشر

ولیکن آب وتر العشر فاقول انه معلوم برهانه انا نخرج قطر د آ ر ولیکن المرکز کا ونصل آب وندیر علی
مرکز آ وبعد آب دائرة ونفصل قوس ت ح منها مساویة لقوس آ د ونصل ت ح ولان زاویة د آ ب تقابل مرکز آ
عشر دور دائرة ترد فانها تقابل من محیط دائرة ا د ب ضعف ذلك وهو خمس دورها وخطا آ د آ ب متساویان
وکل واحدة من قوسی آ د اح ب خمس الدور لکن قوس ت ح مساویه لقوس آ د فاذن ت ح خمس الدور وقد تبین
ان د ب خمس الدور فقوسا د ب ت ح متساویان وخط آ ح منحنی فی هذه الدائرة فمربع آ د مساوی مربع
د ب مع ضرب آ د فی د ب المنحنی ضرب آ ب فی تح فخط ا د ب کخط واحد مستقیم منقسم علی نقطة د
بنسبة ذات وسط وطرفین وقسمه الاطول وهو آ د نصف القطر معلوم فالقسم الاصغر وهو د ب
وتر العشر اذن معلوم وحسابه ان یزاد علی مضروب نصف القطر فی نفسه ربعه ویوخذ جذر



المبلغ وینقص منه نصف القطر فیبقی وتر العشر وذلك بحسب ما بین فی الشکل
الحادی عشر من المقالة الثانیة من کتاب الاصول فی قسمة الخط علی هذه
النسبة ولان خمس الدور هو ضعف عشره ووتر ضعف کل قوس معلومة
الوتر معلوم فوتر الخمس لذلك معلوم وذلك ما اردنا ان نبین

ومن هذه الاشکال بعد حصول امهات الاوتار فی الدائرة یمکن استخراج سایرها علی السبیل المسلوك
فی کتاب المجسطی فان بمعرفة اوتار الفاضل یعلم وتر ما بین السدس والخمس وبمعرفة اوتار الانصاف
ینتهی من اوتار الدرج الصحیح الی وتر ثلثه اجزاء وبمعرفة اوتار الاضعاف والمجموعات یحصل جمیع الاوتار
للدرج المتفاضلة فی الدائرة بثلث درج فاما وتر الجزء الواحد من ثلثمائه وستین جزءا من جملة الدور
فقد اعیا الکل استخراجه واداهم ذلك الی استنباط صنوف الحیل لاستخراجه بالمقربات لا
بالتحقیق فاحسل ایدك الله فکرك فیما جمعته لك وحققه حتی یفتح علیك به ینابیع الفطنة و
یتجلی له عزءوکك صدی الغفلة وتتوصل به الی ما یدق عن افهام العوام وتخسم بینی وبینك مواد

مواد الملام والحمد لله على منه العظام والصلوة على خير خلقه في الانام تمت

بعون الله تعالى وحسن توفيقه

انه هو الرحمن

الرحيم

بخش دوم

مقدمهٔ کتاب استخراج الاوتار

الف ـ متن عربی مقدمهٔ کتاب «استخراج الاوتار» از روی نسخه‌های چاپی (چد : ص۳ ـ چم : ص۳۲)

بسم الله الرحمن الرحيم ، كتاب ابى الريحان محمد بن احمد البيرونى فى استخراج الاوتار فى الدائرة بخواص الخط المنحنى الواقع فيها: وقفت على ما استعلمتنيه من السبب الداعى اياى الى الولوع بتصحيح دعوى لقدماء اليونانيين، فى انقسام الخط المنحنى فى كل قوس بالعمود النازل عليه من منتصفها، والتنقير عن خواصه حتى نسبتنى لاجله ، الى الاشتغال بما يذكره محمد بن زكريا الرازى من فضول الهندسة، من غير أن يشعر بحقيقة الفضول التى هى الزيادة على الكفاية فى كل شیء .

فانه لو شعر بها لوجد نفسه ، مرتبكة فى فضول الوسوسة التى أفسدبها ، فلو بامتجافية عن الديانة، أو شرهة بفضول الدنيا الى العتاد والرياسة، وليس مقدار الكفاية من الهندسة، ماظنه الرازى و أشار بفلسفة اليه ثم عادى باقيه ، ولم يزل الناس أعداء ما جهلوا .

قال الله تعالى (واذلم يهتدوا به فسيقولون هذا افك قديم) ، وأنت لو تحققت

ماهية الهندسة ، وأنها معرفة نسبة الاجناس الواقعة تحت الكمية بعضها الى بعض ، و أنها هى التى تتوصل بها لمعرفة مقدار كل ما نحتاج اليه ، من مزروع و مكيل و موزون ، ما بين مركز العالم و بين أقصى محسوس عنه ، وعرفت أن بها تعقل الصور مجردة عن المواد ، ويتصور حقيقة البرهان تصور انطباع ، حتى لا يذهب على القيم بها ما يذهب على كثير من المحصلين فى المنطق مهما الزم مسلك صناعته، ثم نرتقى بوساطة التدرب بها من المعالم الطبيعية الى المعالم الالهية ، التى تمتنع لغموض معانيها وصعوبة مآخذها ، ودقة طرايقها و جلالة أمرها، و بعد تصورها عن أن ينقاد لكل أحد ، أو يدركها من عدل عن سنن البرهان لما عدلتنى عن ذلك .

و ذلك أن تفعل اذا لم أقتنع فى المطلوب بالطريق الموصل اليه، دون تضييع الزمان فى طلب طرق أخرى اليه، ثم لم يسفر فى آخر الامر عن نتائج هى عمدة علم الهيئة.

فأما كثرة الطرق ، فسبب جمعى اياها تدريب المتعلم بتنوعها ثم اتحادها ، ولانها كانت لى فى الغربة مؤنسة، ولا سامر من فارقتهم من الاصدقاء عمذرة، وقد أثبتها لك لتتأملها و تعرف كيف آل جميعها الى النكتة الواحدة ، وما تثمره الفوائد فى العاقبة، فيتمهد عذرى لديك فيما حمت حوله من عذلى، ورب لائم مليم وما التوفيق الا من عند الله تعالى.

ب - ترجمهٔ مقدمهٔ فوق

آگاه شدم بر آنچه از من پرسیده بودی که به چه سبب به اثبات این ادعای قدمای یونانیان که «چون از وسط کمانی از دایره عمودی بر خط شکستهٔ محاط در آن کمان فرود آید آن خط شکسته را به دو قسمت متساوی تقسیم می کند» اصرار می ورزم و دریافتن خواص آن می کوشم. حتی بدین جهت مرا به آنچه که **محمد بن زکریای رازی** «فضول هندسه» خوانده است نسبت داده بودی. ولی او خود از حقیقت «فضول» که افزودن بر اندازهٔ کفایت در هر چیز است آگاه نبود، و گرنه گرفتار فضول وسوسه ای

نمی‌شد که با آن دلهای گریزان ازدین ، یا آزمند به‌فزونی‌مال وریاست، راتباه کرده است. اندازهٔ کافی هندسه‌آن نیست که رازی پنداشته ودرفلسفهٔ خود بـه آن اشاره کرده(۱) وسپس با بازماندهٔ آن دشمنی نموده‌است. آری‌هنوزمردمان دشمن‌چیزهایی هستندکه نمی‌دانند.

خدای تعالی گفته است : و اذ لم یهتدوا به ، فسیقولـون هذا افك قدیم(۲) (= وچون به‌آن راه نبردند ، می گویند این دروغی کهن‌است) . واگرتودرماهیت هندسه تحقیق‌می کردی ومی‌دانستی که‌آن شناختن‌نسبت‌جنسهای‌واقع درزیر کمیت به‌یکدیگراست،واینکه وسیله‌ای‌است که با آن به‌شناختن هرچه‌پیمودنی وسنجیدنی است که‌میان‌مرکزجهان ودورترین‌نقاط محسوس آن‌واقع‌است‌دسترس‌حاصل‌می‌شود، ومی‌دانستی که بوسیلهٔ هنـدسه تعقل صورتهای مجرد ازماده امکان پذیراست ، و درنتیجهٔ ممارست آن‌حقیقت برهان‌درذهن‌نقش می‌بندد،وکسی که باهندسه سروکار دارد هراندازه لازم باشد درصناعت خود پیش میرود و مانند بسیاری ازمحصلان منطق به‌بیراهه نمی‌افتد ، ومی‌دانستی که باتمرین درهنـدسه ازنمودارهای طبیعت به نمودارهای الهی ارتقا حاصل می‌شود ، که به‌علـت پیچیدگی معانی و دشواری اصول وباریکی‌راهها وعظمت‌امرودوری‌تصورآن‌ازذهن،راه‌یافتن به‌آن ودریافتن آن برای کسی که‌از راههای‌روشن‌برهان عدول کند ممکن نیست ، مرابه‌این‌کار ملامت نمی‌کردی .

واین‌برای‌آن‌است که‌اگر برای رسیدن به‌مطلوب ازراهی که می‌خواهد به آن برسد بدون تباه کـردن وقت توفیق نیافت ، درصدد جستن راه دیگری برآید تاازنتایجی که به‌آن می‌رسد ودرعلم هیئت اهمیت دارد محروم نماند.

واما اینکه من راههای فراوان را جمع آورده‌ام، برای آن است که متعلم با گونه گونی آنها و اینکه همه به یك نتیجه می‌انجامد، تمرین کند و آشنا شود. ودیگر اینکه چنین کاری برای من در غربت مونسی بود و با دوستانی که از ایشان دور افتاده بودم حدیث می گفتم واین کار یادآور ایشان بود. همه را ثبت کردم تا خوب در آنها تأمل کنی وبدانی که چگونه باز گشت همهٔ آنها به یك نکته‌است. فوایدی که در پایان نصیب تومی‌شود عذرخواه پرنویسی من خواهد بود که سبب سرزنش‌کردن توشده است. و چه بسیار ملامت گر که خود سزاوار ملامت شدن است. و توفیق جزازجانب خدا نیست.

ج- مقدمهٔ «استخراج‌الاوتار» ازروی نسخهٔ خطی «عل»

متن عربی این‌مقدمه درصفحات۱۳و۱۴ کتاب‌حاضر ازروی نسخهٔ خطی«عل» به چاپ رسیده‌است. ازتطبیق این‌مقدمه بامقدمهٔ نسخه‌های‌چاپی «استخراج‌الاوتار» که در صفحات ۵۷ و ۵۸ کتاب حاضر به‌چاپ رسیده است می‌توان مشاهده کرد که قسمت‌اول یعنی۱۳سطر اول مقدمهٔ‌نسخهٔ‌خطی«عل»با۲۱سطر اول‌مقدمهٔ نسخه‌های چاپی‌تقریباً باهم‌یکی‌است، بااین‌تفاوت که‌درمقدمهٔ‌نسخهٔ«عل»نام **محمدبن‌زکریای رازی** ذکر نشده‌است. اماعبارات‌زیر که‌ازسطر چهاردهم به‌بعدنسخهٔ«عل» آمده‌است باقسمت اخیرمقدمهٔ نسخه‌های چاپی اختلاف دارد.

« ... ولك ایدك‌الله‌ان‌تعذلنی‌علی ماذکرت‌لو کنت تولیت استخراج‌تلك‌الطرق باسرها فضیعت‌الزمان فیما یکفی منه‌الیسیر اولم یحصل منها آخر الامرماهوالعمدة فی‌علم الهیئةاعنی استخراج‌الاوتار فی‌الدایره و نسب مقادیرها الی مقدار القطرو اجزائه المفروضة له. لکن هذه‌الدعوی وقعت بین یدی جماعة من فضلاء اهل هذا

العلم فاجتهد کل منهم فی تصحیحها و اقامة البرهان علیها . فاجتمع عندی منها ماکنت اکرر النظر فیه حباللعلم وتعلیلاللفوأد عن غلیل الاشواق الی اولئك الفضلاء ایام الغربة و...(*) ذلك صرف الفکرة الیه حتی شارکهم فی اقامة البرهان علیه علی مایبین فی خلال الکلام وصار اصلامن الاصول الهندسیه ثبت علیه جوابات کثیره من المسایل سئلتها و قدجمعت کل ذلك لك واصفت کل طریقه الی صاحبها کماهوعادتی لتنظر فیها وتعرف ما آل جمیعها الی النکته الواحدة وماسنح منه اخیرا من الوصول الی معرفة الاوتار فیتمهد عذری لدیك فیما حمت حوله من عذلی...

د ـ ترجمهٔ آزاد عبارات فوق به فارسی :

وتو، که خدایت تأیید کناد ، در آن صورت حق داشتی مرا بر آنچه گفتم سرزنش کنی که من به استخراج همهٔ این روشها می پرداختم ووقتم را در چیزی تباه می کردم که به دست آوردن اندکی از آن کافی می بود، یا اینکه بالاخره در نتیجهٔ این کوششها آنچه درعلم هیئت اهمیت اساسی دارد، یعنی استخراج وترهای دایره و نسبتهای مقادیر آنها به قطر واجزای مفروض آن به دست نمی آمد. اما این قضیه به دست عده‌ای از فضلای اهل این علم افتاد وهریك از آنها در تصحیح و اثبات آن کوشیدند وعده‌ای از این برهانها نزد من گرد آمد ومن بدسبب دلبستگی به علم وفرونشاندن آتش شوقی که به آن دانشمندان در ایام غربت داشتم در آنها مکرر نظر می کردم ودر آنها بسیار می اندیشیدم تا آنجا که خود نیز چنانکه در متن کتاب دیده می شود برای آن قضیه برهانها آوردم واین قضیه یکی از اصول هندسی شد که به وسیلهٔ آن می توان جواب

(*)ـ دراین موضع از نسخهٔ خطی (سطر اول از صفحهٔ دوم) کلمه‌ای نوشته شده که نتوانستم بخوانم.

بسیاری ازمسائل را که ازمن پرسیده شده بود به‌دست آورد.

پس همهٔ آنها را برای‌تو جمع آوری کردم و، همان گونه که عادت من است، هر روش وطریقه را به نام صاحب آن ثبت کردم(۳) تا تو در آنها نظر کنی و بدانی که همهٔ آنها به یك نکتهٔ واحد برمی گردد. ونتیجه‌ای که بالاخره از آن یك نکته حاصل می‌شود دست‌یافتن به شناخت اوتاردایره است. واین خودعذرخواه من در پیش تواست که نمی‌بایستی مرا ملامت کرده باشی وچه بسا ملامتگر که خود سزاوار ملامت شدن است وتوفیق جزازجانب خداوند عزیزحکیم نیست.

یادداشتهای مربوط به‌بخش دوم

(۱)- محمدبن‌زکریای‌رازی کتابی باعنوان «کتاب الردعلی‌من‌اشتغل بفضول الهندسة» نوشته بوده‌است (رجوع کنید به‌ترجمهٔ فارسی «تاریخ‌الحکماء»، با مقابله و تصحیح و حواشی ومقدمه به‌کوشش خانم دکتربهین دارائی، تهران ۱۳۴۷ص۳۷۵-درمتن‌عربی «تاریخ‌الحکماء» چاپ (Lippert)، ص ۲۷۳ وهمچنین درترجمهٔ‌فارسی «الفهرست» توسط آقای م. تجدد، ص۵۳۲ نام این‌کتاب درست ثبت نشده‌است. عنوان صحیح آن همان است که درفوق نوشته‌ام).

به عقیدهٔ‌آقای دکترمهدی محقق اینکه بیرونی‌می‌گوید رازی مقدار کفایت ازهندسه را در فلسفهٔ خود اشاره‌کرده ناظراست به عبارتی‌که رازی درکتاب «السیرةالفلسفیه» آورده است (رجوع کنید به «السیرةالفلسفیة» چاپ یونسکو به‌اهتمام دکترمهدی محقق، تهران ۱۳۴۳ص۱۲۲).

(۲)- قسمت‌آخرازآیهٔ یازدهم سورهٔ۴۶ (سورةالاحقاف).

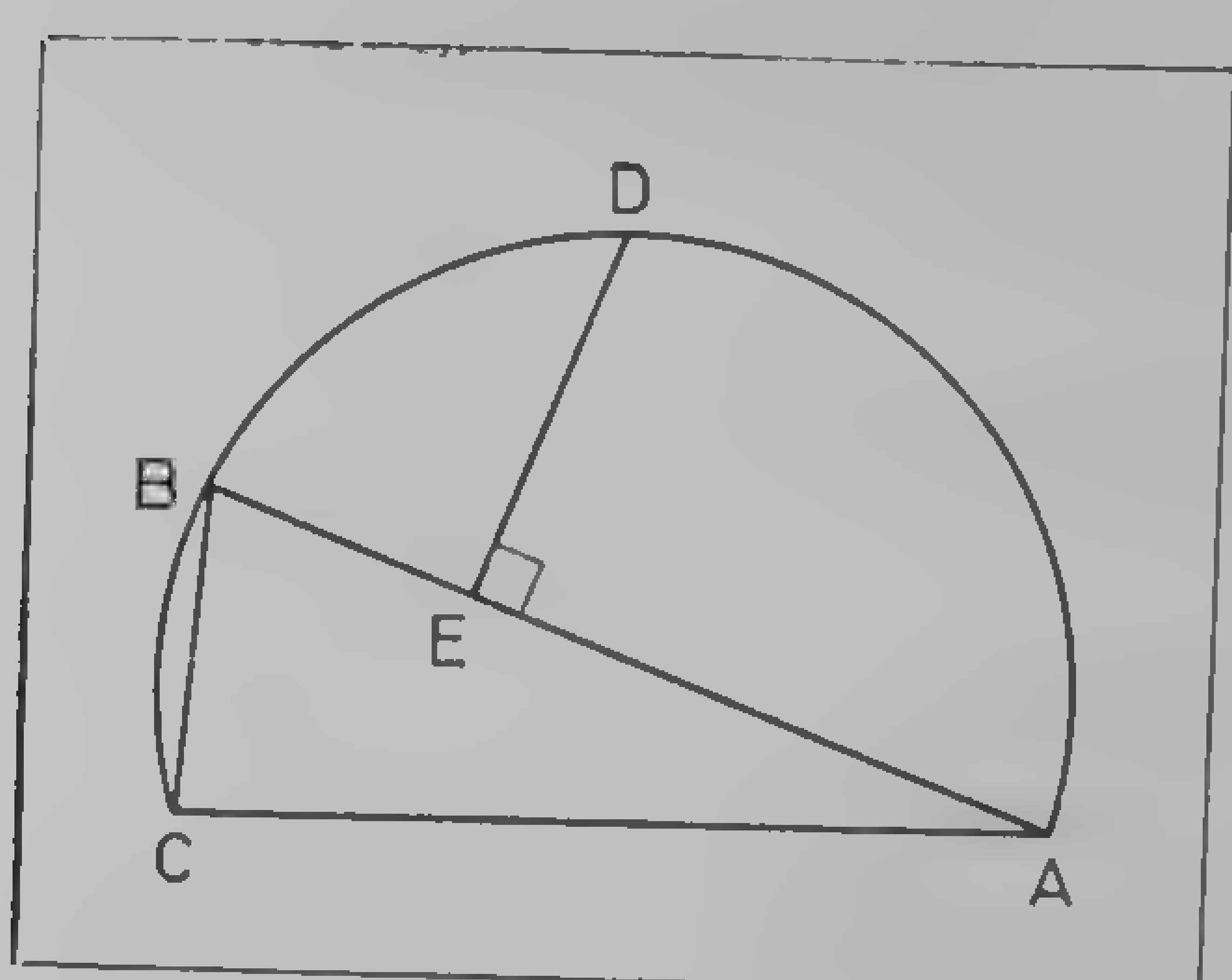
(۳)- این حقیقتی‌است انکارناپذیر و استاد بیرونی ازاین راه خدمت بزرگی به تاریخ ریاضیات کرده است.

بخش سوم

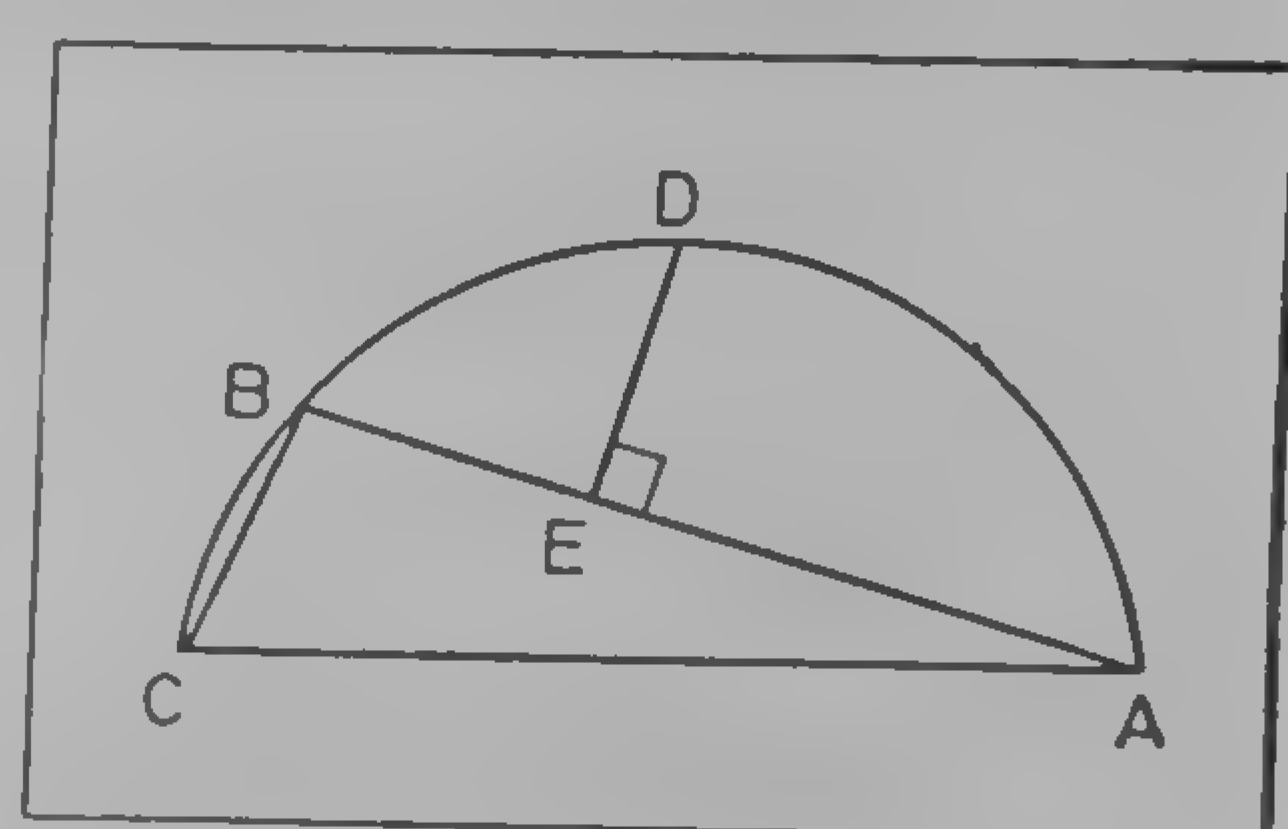
قضایای کتاب استخراج الاوتار

الف ـ عنوان قضیهٔ اول

عنوان قضیهٔ اول(۱) ـ اگر خط شکستهٔ ABC که دوضلع آن AB و BC متساوی نیستند در کمان $\widehat{ABC}$ از دایره‌ای(۲) محاط باشد و از نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ عمود DE را برضلع بزرگتر خط شکسته فرودآوریم، پای این عمود وسط خط شکستهٔ ABC خواهد بود(۳).



(شکل۲)



(شکل۱)

فرض : اولاً $\widehat{ABC}$ کمانی است ازدایره و $AB>BC$
ثانیاً نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است
ثالثاً $DE \perp AB$

حکم : $AE = EB + BC$

[رجوع کنید به‌یادداشت‌شمارهٔ (۴) ذیل]

یادداشتهای مربوط به عنوان قضیهٔ اول

(۱)- این‌قضیه درنسخه‌های‌کتاب «استخراج‌الاوتار» (عل : ص۲- چد : ص۴ - چم : ص۳۳) به صورت زیرعنوان شده‌است :

«اذاعطف فی‌قوس ما من دائرةخط مستقیم علی غیرتساو وانزل‌علیه من منتصف تلك‌القوس عمود فانـه ینقسم بنصفین» (دراینجا مقصود ازخط مستقیم خط شکسته است) .

همین قضیه درکتاب «قانون‌مسعودی» (ج۱ ص۲۷۳) به‌صورت زیر عنوان شده‌است :

«مقدمة لارشمیدس مبرهنة بغیربرهانه : فلیکن قوس **ا ج د** معطاة و قدانحنی تحتهاخط **ا ج د** المستقیم‌ونتزل‌من **ب** منتصف‌القوس‌عمود **ب ه** علی‌اعظم قسمی‌الخط‌المنحنی فاقول انه قسمه بنصفین علی **ه** .اعنی‌ان**ا ه** مساولمجموع **ه ح** و **ج د** ».

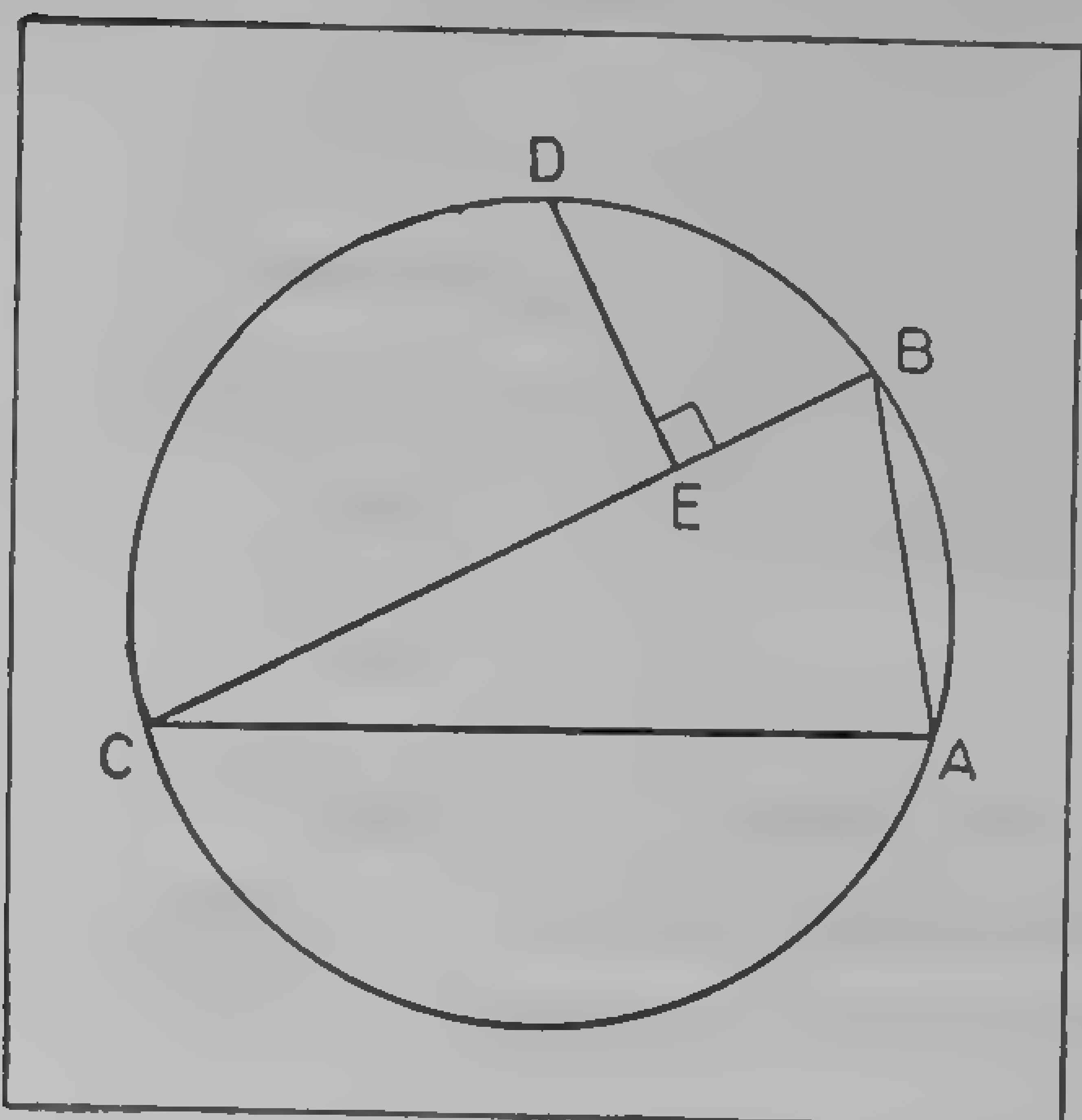
(دراینجاخط‌شکسته**ا ج د** یك‌بار «مستقیم» ویك‌بار «منحنی»خوانده شده است) .

چون‌صورت اخیر برای فهم قضیه رساتراست عنوان‌قضیه‌راباپیروی ازآن بیان‌کردم .

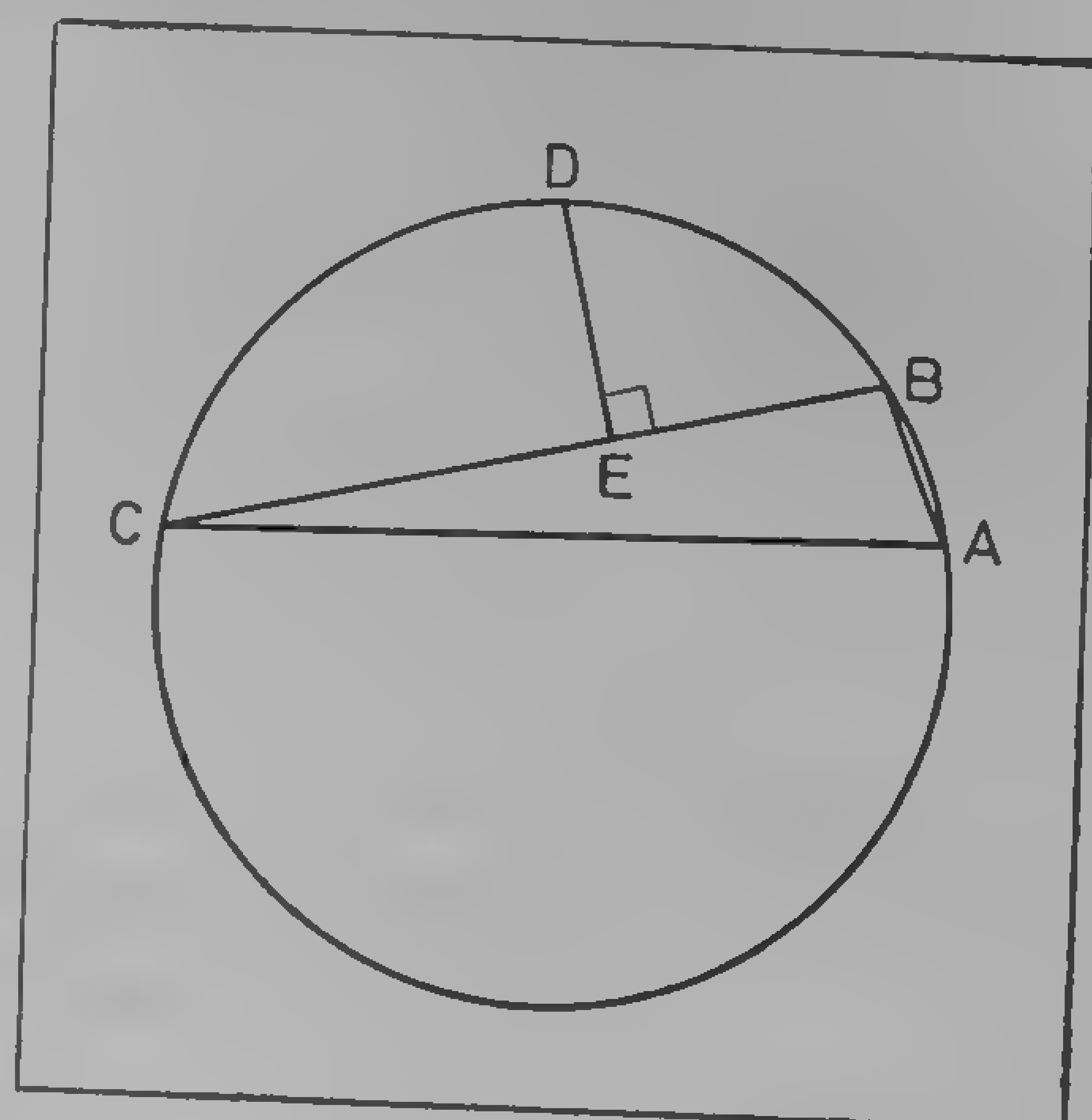
(۲)- مقصودازکمان $\widehat{ABC}$ دراینجا قسمتی است از دایره‌که دوسر آن نقاط A و C هستند و نقطهٔ B روی‌آن قراردارد .

(۳)- اگردونقطهٔ AوC را درروی یك‌دایره‌درنظربگیریم دوکمان $\widehat{AC}$ پدید می‌آیدکه پاره‌خط AC وترمشترك‌آنها است. قضیهٔ موردبحث

دربارهٔ هریك از این دو کمان (خواه کوچکتر از نیمدایره وخواه بزرگتر از نیمدایره وخواه مساوی با نیمدایره) صحیح است، به شرط آنکه نقطهٔ D (وسط کمان $\widehat{AC}$) ونقطهٔ اختیاری B هردو روی یك کمان $\widehat{AC}$ واقع باشند. (نه اینکه وسط یکی از دو کمان $\widehat{AC}$ را D بنامیم ونقطهٔ B را روی کمان دیگر $\widehat{AC}$ اختیار کنیم) ـ به شکلهای زیر و نیز به شکلهای ۱ و۲ نگاه کنید :



(شکل۴)



(شکل۳)

درشکلهای فوق وتر BC بزرگتر از وتر AB است و بنابراین عمود DE بر وتر بزرگتر یعنی BC فرودآمده است وداریم $CE = EB + BA$ اما درشکلهای ۱ و ۲ وتر AB از وتر BC بزرگتر است و درآنجا عمود DE بر AB فرودآمده است وداریم $AE = EB + BC$.

البته اگر درشکلهای ۳ و۴ اسم نقاط A و C را باهم عوض کنیم همان شکلهای ۱ و۲ حاصل خواهد شد. درهرصورت باید عمود DE به وتر بزرگتر فرود آید .

(۴)ـ درنسخهٔ خطی «عل» و درکتاب «قانون مسعـودی» دربارهٔ اوضاع مختلف نقاط A و B و C روی دایره مربوط به این قضیه بحثی به میان نیامده است . اما درنسخه‌های چاپی استخراج الاوتار (چد : ص ۶۹۵ ـ

چم : ص ۳۳و۳۴) دربارهٔ اختلاف اوضاع نقاط A وB وC روی دایره مطالبی نوشته شده است (چد : ص۵و۶ - چم : ص۳۳و۳۴). چون قضیه به صورتی که در «قانون مسعودی» عنوان شده است چنانکه گفتم درهمهٔ حالات با در نظر-گرفتن شرایط مذکور صحیح است ذکر آن بحث را لازم ندیدم. در هرصورت برای اطلاع کسانی که نسخهٔ چاپی «چم» از « استخراج الاوتار» را در اختیار دارند خاطر نشان می کنم که قسمتی از آنچه آقای احمد سعیدالدمرداش در صفحهٔ ۳۵ آن چاپ به عنوان شرح نوشته است با گفتهٔ استاد بیرونی تطبیق نمی کند.

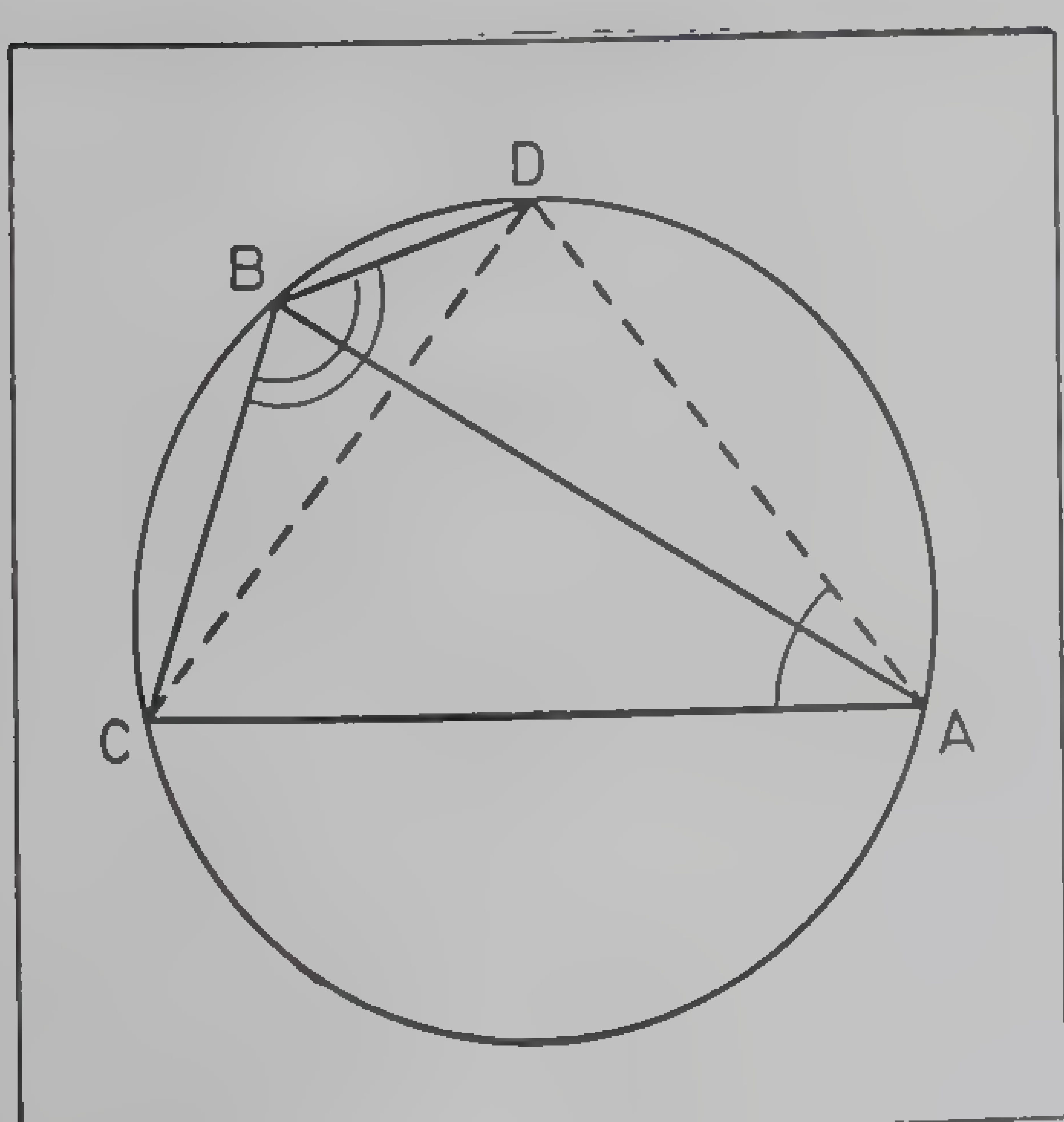
تبصره- شکل هندسی مربوط به قضیهٔ اول دارای خاصیتی است که اگرچه استاد در آغاز کتاب «استخراج الاوتار» به آن اشاره نکرده است اما چنانکه بعداً خواهیم دید در استدلالها آن را به کار برده است. مثلاً رجوع کنید به برهان پنجم قضیهٔ اول.

آن خاصیت این است :

اگر روی کمان $\widehat{AC}$ متعلق به یك دایره نقطهٔ دلخواه B را اختیار کرده وسط کمان $\widehat{ABC}$ را نقطهٔ D بنامیم به شرط آنکه وتر AB از وتر BC بزرگتر باشد زاویهٔ DBC منفرجه خواهد بود .

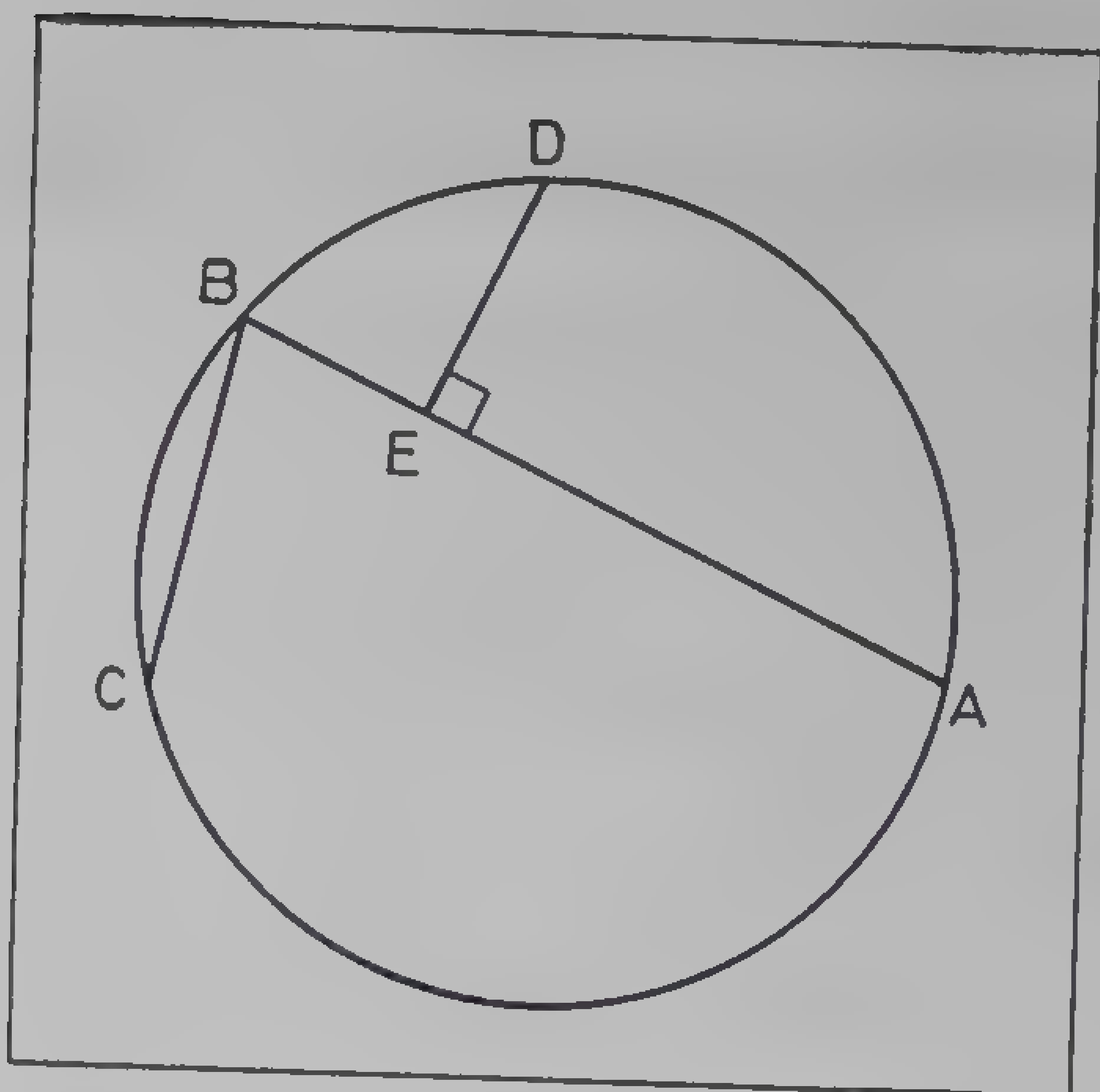
زیرا واضح است که مثلث ADC متساوی الساقین است (DA = DC) وبنابراین زاویهٔ DAC حاده است . پس زاویهٔ DBC که مکمل آن است منفرجه می باشد .

توجه کنید - چون شکل هندسی مربوط به قضیهٔ اول در همهٔ



(شکل ۵)

برهانهایی که برای این قضیه ذکر خواهد شد مورد احتیاج است در آغاز هر برهان شکل را با قراردادهای زیر رسم کرده از تکرار ذکر این قراردادها خود داری خواهم کرد. البته در هر استدلال این شکل را که اساس کار است به وجه مناسب تکمیل خواهم نمود.

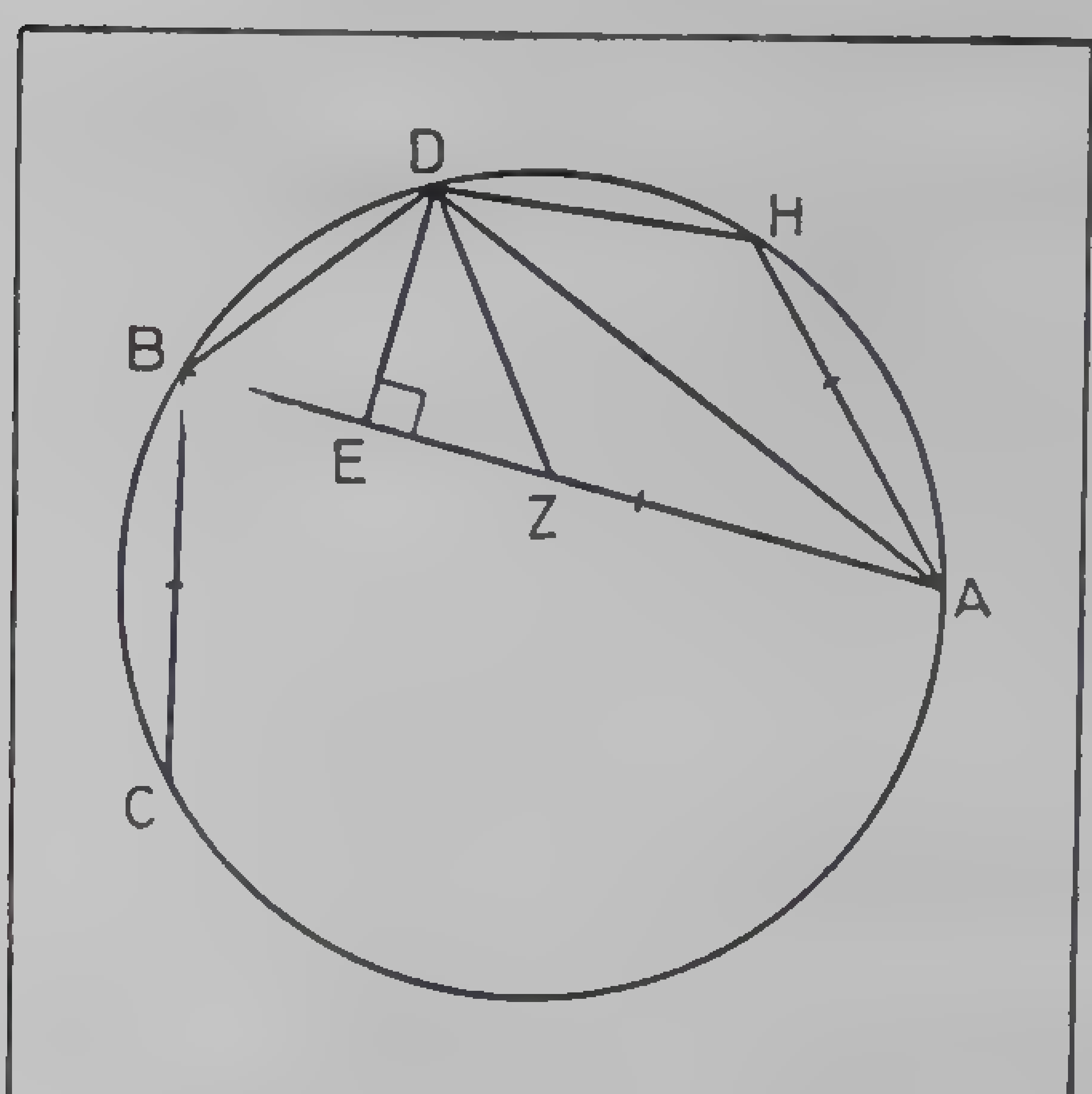


(شکل ۶)

در این شکل نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ از دایره و نقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی متعلق به کمان $\widehat{ADC}$ است به قسمتی که $AB>BC$ و نقطهٔ E پای عمودی است که از نقطهٔ D (وسط کمان $\widehat{ABC}$) بر وتر بزرگتر AB فرود آمده است.

حکم قضیهٔ اول این است که:

$$AE = EB + BC$$



(شکل ۷)

ب ـ برهانهای قضیهٔ اول

برهان اول قضیهٔ اول(۱)ـ

نخستین برهان(۲) از ارشمیدس در کتاب دوایر(۳) (و کتاب سارینوس ثیبائی(۴) فی الاصول الهندسیة(۵)).

روی دایره کمان $\widehat{DH}$ را مساوی با کمان $\widehat{DB}$ جدا کرده DH و DB و HA را رسم می کنیم.

سپس روی EA پاره خط EZ را مساوی با EB جدا کرده DZ و DA را رسم می کنیم داریم : $DB = DZ$ (زیرا DE عمودمنصف پاره خط BZ است)

$\widehat{HA} = \widehat{BC}$ (زیرا D وسط کمان ABC است و $\widehat{BD} = \widehat{DH}$)

پس : $\widehat{HDA} + \widehat{DAB} = \widehat{DBA}$ (اندازهٔ آنها یکی است)

یعنی : $\widehat{HDA} + \widehat{DAB} = \widehat{DZB}$ (زیرا مثلث DBZ متساوی‌الساقین است)

اما $\widehat{DZB}$ زاویهٔ خارجی مثلث ADZ است . پس :

$$\widehat{DZB} = \widehat{ZAD} + \widehat{ZDA}$$

و $\widehat{ZAD}$ همان $\widehat{DAB}$ است. پس ازدوتساوی اخیر نتیجه می‌شود :

$$\widehat{ZDA} = \widehat{HDA}$$

بنابراین دومثلث DHA و DZA درحالت دوضلع وزاویهٔ بین آنها متساویند. پس $AZ = AH$ اما $AH = BC$ و $ZE = EB$ پس :

$$AZ + ZE = EB + BC$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان اول قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص۲ - سوتر A: ص۱۳ و نیز ص۶۷- چد: ص۷ - چم: ص۳۸.

(۲)- دوبرهان دیگر برای همین قضیه ازارشمیدس باعنوانهای برهان سوم وبرهان پنجم قضیهٔ اول خواهد آمد.

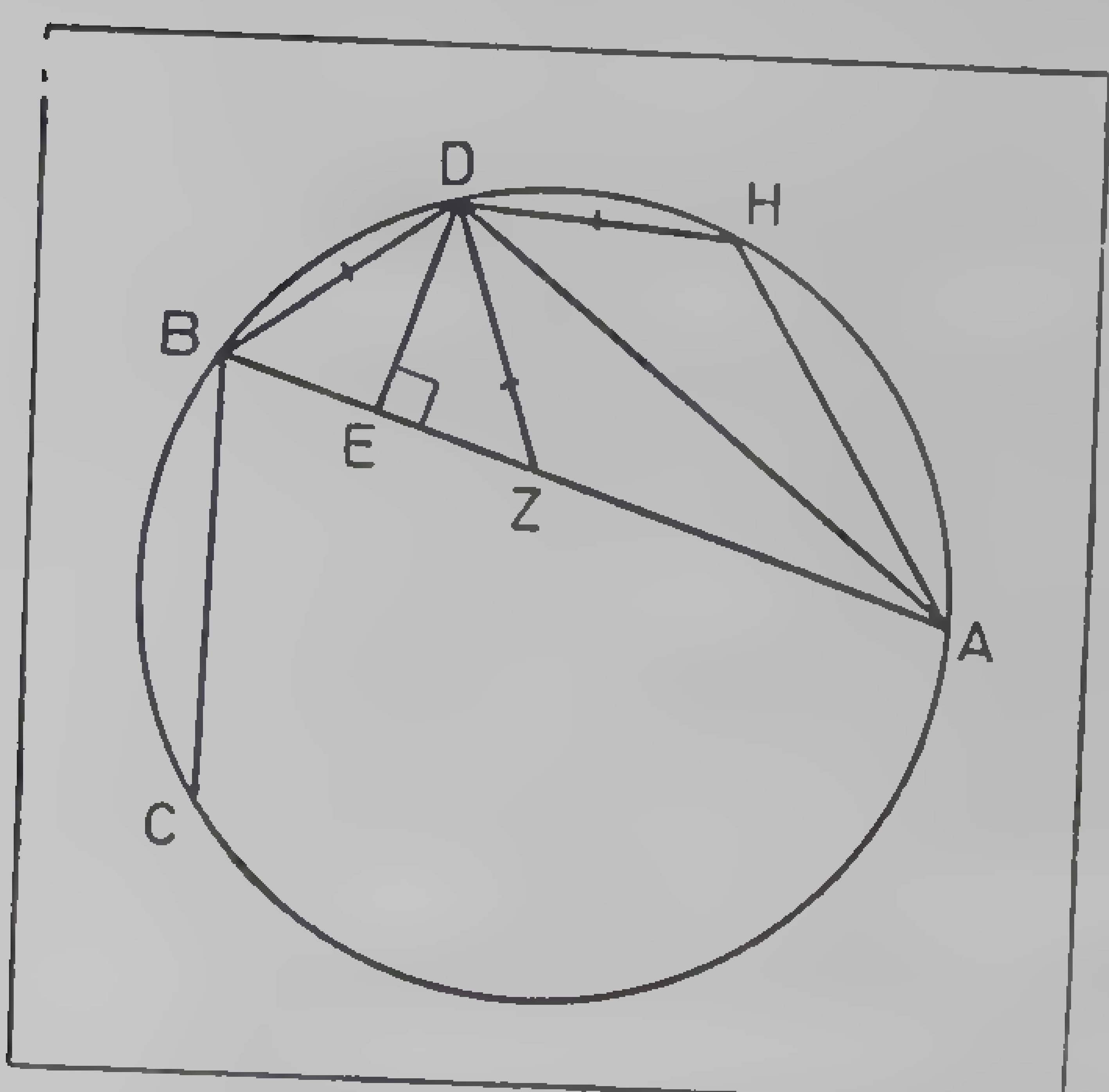
(۳)- ابن ندیم درکتاب «الفهرست» (ترجمهٔ فارسی الفهرست : ص۴۸۰) کتاب «الدوایر المماسة» را به نام ارشمیدس ثبت کرده است .

ولی مورخان ریاضی اروپایی ازوجود چنین کتابی به نام ارشمیدس اظهار بی‌اطلاعی کرده‌اند (← هیث A: ص XXXVIII)- سوتر نوشته‌است که ممکن است این «کتاب‌الدوائر» باکتاب «مأخوذات» ارشمیدس رابطه‌ای داشته باشد. به این معنی که شاید کتاب «مأخوذات» قسمتی‌یامختصری از «کتاب الدوائر» بوده‌باشد (← سوتر A: ص۶۷).

(۴)- دربارهٔ‌سارینوس ثیبائی رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحات ۵۱۱ و ۵۱۲.

(۵)- نام‌سارینوس ثیبائی و کتاب «فی‌الاصول‌الهندسیة» او درنسخهٔ «عل» نیست وفقط درنسخه‌های چاپی «استخراج‌الاوتار» آمده‌است.

برهان‌دوم قضیهٔ‌اول(۱) - نخستین برهان(۲) از ابوسعید محمد بن علی ضریر جرجانی(۳) - این برهان با اندک‌اختلافی شبیه برهان‌اول ارشمیدس‌است.



(شکل ۸)

کمان $\widehat{AH}$ را روی دایره مساوی با کمان $\widehat{BC}$ و پاره خط AZ را روی AE مساوی‌با AH جدا می‌کنیم. داریم:

$\widehat{DH} = \widehat{DB}$ (زیرا از دو کمان متساوی AD و DC دو کمان‌متساوی را کم کرده‌ایم)

پس: $\widehat{HAD} = \widehat{DAZ}$ (زیرا هردومحاطی و رو به روی کمانهای متساوی هستند)

بنابراین دو مثلث DAZ و DAH متساویند (درحالت دوضلع وزاویهٔ بین آنها)

پس $HD = ZD$ ازطرف دیگر $BD = DZ$ (زیرا هردو با DH مساویند)

بنابراین مثلث BDZ متساوی‌الساقین است و ارتفاع DE منصف قاعدهٔ BZ است.

بنابراین :

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم(۴).

یادداشتهای مربوط به برهان دوم قضیهٔ اول :

(۱) ـ عل : ص ۲ و ۳ ـ سوتر A : ص ۱۳ ـ چد : ص ۸ ـ چم : ص ۴۰ .

(۲)ـ یک برهان دیگر از ابوسعیدجرجانی به عنوان برهان ششم خواهد آمد .

(۳)ـ ابوسعید جرجانی ریاضیدانی ایرانی بوده که ازوی اطلاع چندانی دردست نداریم.

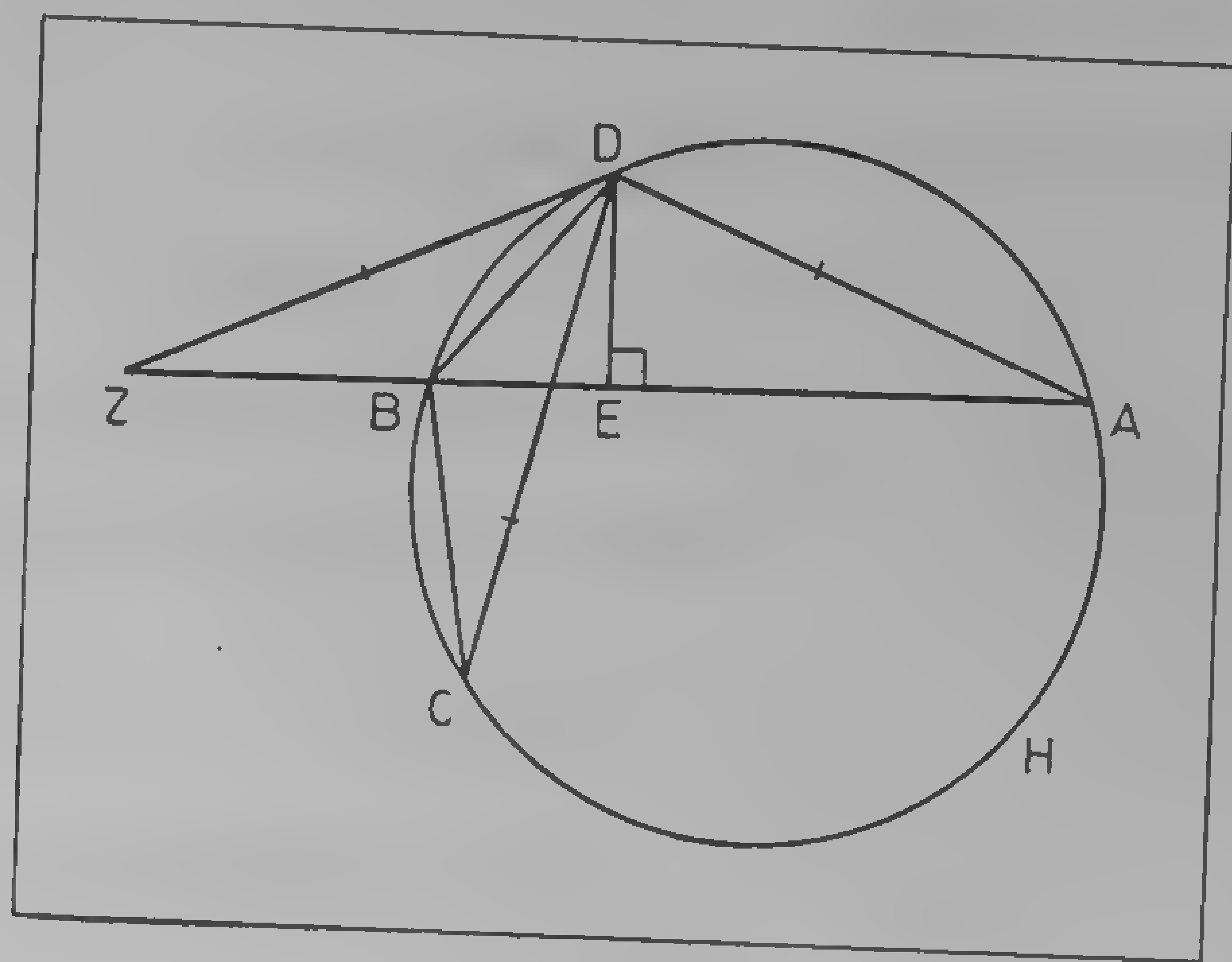
شاید برهانهائی که استادازوی نقل کرده‌است ازکتاب «مسایل هندسیة» وی استخراج شده باشد (رجوع کنید به کتاب «ریاضیدانان ایرانی» صفحات ۴۱ و ۴۲).

(۴)ـ درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» درپایان این برهان آمده است : «واتفق لی‌مثل هذابعینه فی کتابی فی تصحیح القول بین العرض والطول»

برهان سوم قضیهٔ اول(۱)ـ دومین برهان(۲) ازارشمیدس در کتاب دوایر(۳).

AB را امتداد داده روی آن EZ رامساوی با EA جدامی کنیم و پاره‌خطهای DA و DC و DB و DZ را رسم می کنیم. داریم :

$AD = DC$ (زیرا D وسط کمان ABC است)



(شکل۹)

$AD = DZ$ (زیرا DE عمودمنصف پاره‌خط AZ است)

پس $DZ = DC = AD$. ازطرف دیگر دوزاویهٔ C و A محاطی وروبه‌روی یك کمان هستند پس $\widehat{DAB} = \widehat{DZB} = \widehat{DCB}$

وچون کمان $\overset{\frown}{DA}$ با کمان $\overset{\frown}{DC}$ مساوی‌است اگر کمان $\overset{\frown}{CHA}$ را بر هر یك ازآنها بیفزاییم کمانهای متساوی $\overset{\frown}{DAHC}$ و $\overset{\frown}{DCHA}$ حاصل می‌شوند، امازاویهٔ DBC رو به روی کمان $\overset{\frown}{DAHC}$ و زوایای DAB و ADB مجموعاً رو به روی کمان $\overset{\frown}{DCHA}$ می‌باشند (زاویهٔ DAB رو به روی کمان $\overset{\frown}{DB}$ و زاویهٔ ADB روبه‌روی کمان BCA است) پس معلوم می‌شود که :

$$\widehat{DBC} = \widehat{DAB} + \widehat{ADB}$$

ازطرف دیگر زاویهٔ DBZ زاویهٔ خارجی مثلث ADB است پس:

$$\widehat{DBZ} = \widehat{DAB} + \widehat{ADB}$$

ازدوتساوی فوق معلوم می‌شود که $\widehat{DBC} = \widehat{DBZ}$

وقبلاً نیزدیدیم که $\widehat{DZB} = \widehat{DCB}$ بنابراین دوزاویه از مثلث DZB با دو زاویه ازمثلث DCB نظیر به نظیر با هم برابرند پس زوایای سوم آنهانیز با هم مساویند وچون دراین دومثلث ضلع BD مشترک‌است این دو مثلث متساویند و در نتیجه $ZB = BC$ وچون $ZB + BE = EA$

پس $CB + BE = EA$

واین‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

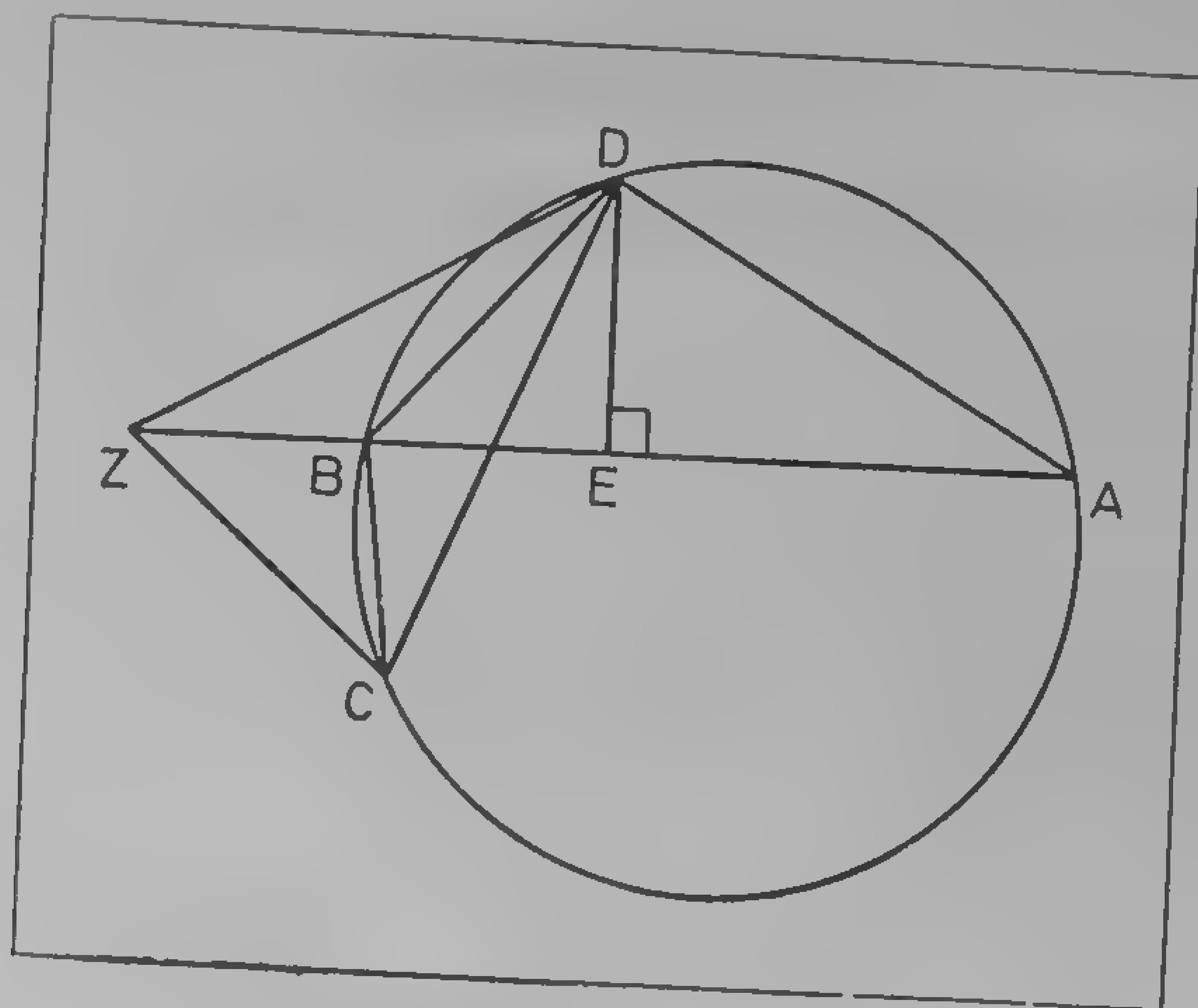
یادداشتهای مربوط به برهان سوم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص۳ - سوترA : ص۱۳ - چد : ص۱۸ - چم:ص۵۱.

(۲)- نخستین برهان ارشمیدس به عنوان برهان‌اول قضیهٔ‌اول گذشت وسومین برهان او بعنوان برهان‌پنجم خواهدآمد.

(۳)- درچاپهای حیدرآباد و مصر ازکتاب «استخراج‌الاوتار» این برهان پانزدهمین برهان قضیهٔ اول‌است. ودرآنجا درآغازاین‌برهان‌آمده‌است. «ومنهم من صحح ذلک‌فی‌الجانب‌الاخر کارشمیدس‌فی‌کتاب‌الدوائرو سارینوس فی‌الاصول‌الهندسیه ببرهان غیرالذی حکیناه عنه وهو... » - دربارهٔ«کتاب الدوائر» و نام سارینوس رجوع کنید به یادداشتهای شمارهٔ۲و۳ ذیل برهان اول ازقضیهٔ‌اول.

برهان‌چهارم قضیهٔ‌اول(۱) - نخستین برهان(۲) از آذرخور ابن استاد جشنس(۳) - این‌برهان با اندك اختلاف شبیه برهان قبل‌است.



(شکل ۱۰)

AB را امتداد داده EZ را مساوی با AE جدا می‌کنیم و پاره‌خطهای DA و DB و DC و DZ و ZC را رسم می‌کنیم. چون DE عمودمنصف پاره‌خط AZ است $DA = DZ$ وچون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است $DA = DC$

بنا براین $\widehat{DAB} = \widehat{DZB}$ و $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ (زیرا هر دو محاطی و رو به روی یك کمان هستند) پس $\widehat{DZB} = \widehat{DCB}$.

حال گوییم چون مثلث DZC متساوی‌الساقین است $\widehat{DZC} = \widehat{DCZ}$ و اگر از این دوزاویهٔ متساوی دوزاویهٔ متساوی DCB و DZB را کم کنیم می‌ماند:

$$\widehat{BCZ} = \widehat{BZC}$$

پس مثلث BZC متساوی‌الساقین است و $BZ = BC$ و چون $ZB + BE = EA$ بنابراین $BC + BE = AE$.

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان‌چهارم قضیهٔ‌اول

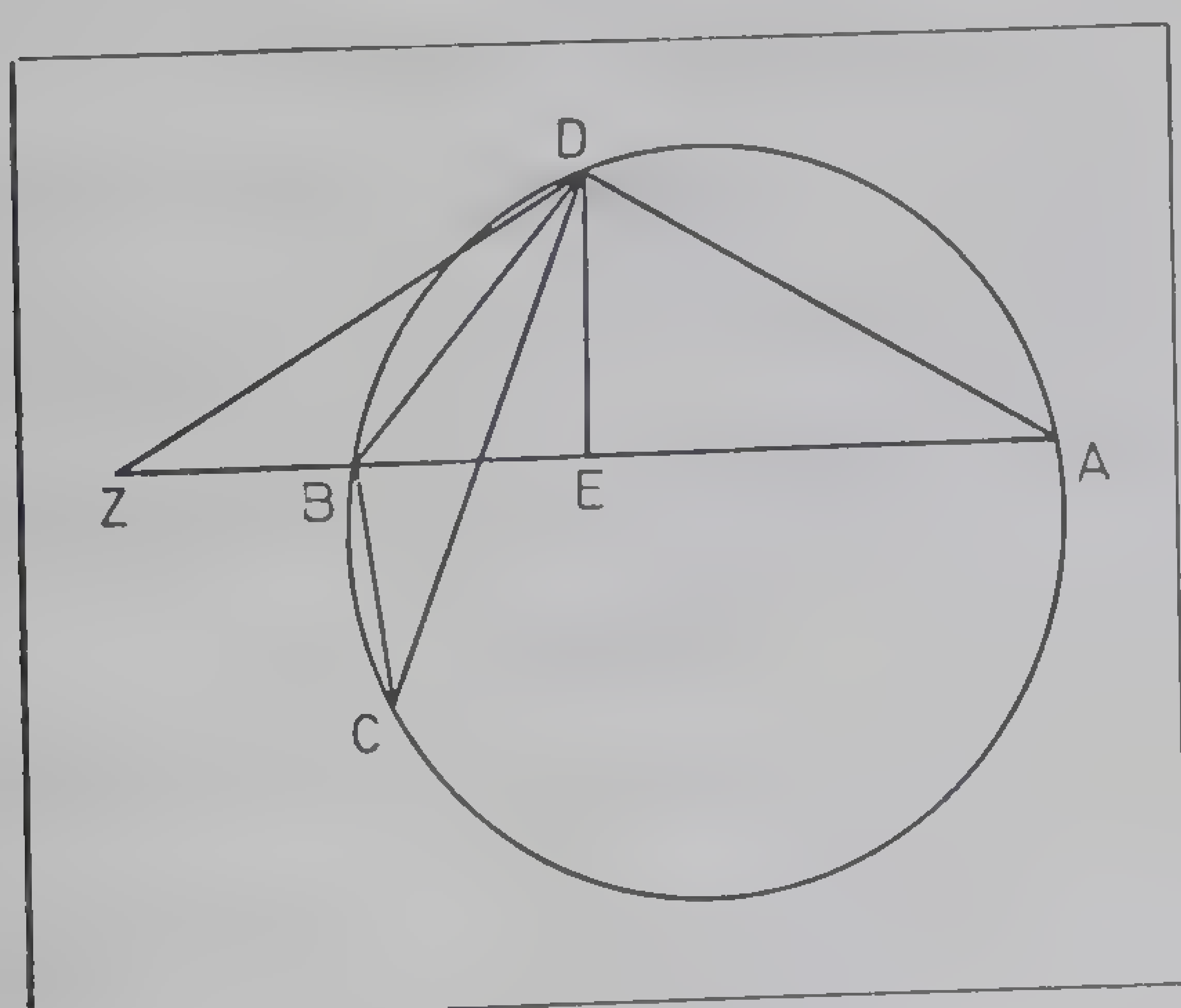
(۱)- عل:ص۳و۴ - سوترA: ص۱۴ونیزص۶۷ - چد: ص۱۹و۲۰- چم: ص۵۲ .

(۲)- دومین برهان ازابوالحسن‌آذرخور به عنوان برهان چهاردهم قضیهٔ‌اول خواهدآمد.

(۳)- ابوالحسن آذرخور ریاضیدانی بوده است معاصربیرونی ودلیل این امراینست که‌بیرونی درکتاب «آثارالباقیه» (چاپ زاخاو،ص۴۴) نوشته است «وسمعتها من ابوالحسن‌آذرخور...» - ورجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص۵۲۱ .

برهان پنجم قضیهٔ‌اول(۱) - سومین برهان(۲) از ارشمیدس در «کتاب الدوائر»(۳).

استادنوشته‌است(۴) که این برهان را در کتاب «مسائل» ازیونانیان دیده و احتمال داده‌است که شاید آن کتاب ازآپولونیوس باشد که یوحنابن‌یوسف(۵) آن را ازیونانی به عربی ترجمه کرده‌است.



(شکل۱۱)

[این برهان اصولاً مانند برهان‌دوم ارشمیدس‌است، که‌آن را به عنوان برهان‌سوم قضیهٔ‌اول نوشتم، جز اینکه دراین برهان تساوی‌دومثلث ZDB و CDB با استفاده ازقضیهٔ هفتم مقالهٔ‌ششم «اصول اقلیدس» ثابت شده‌است[۶] بدون آنکه مستقیماً به‌آن قضیه اشاره شده‌باشد.]

AB را امتداد داده روی‌آن EZ را مساوی با AE جدا می کنیم و پاره‌خطهای DA و DC و DB و DZ را رسم می کنیم.

DC وتری‌است‌ازدایره‌و کمان $\widehat{DBC}$ ازنیمدایره کوچکتراست.این کمان نمی‌تواند ازنیمدایره‌بزرگتر باشد زیرا کمان $\widehat{AD}$ با آن‌مساوی‌است وممکن‌نیست دو کمان متساوی ازدایره جدا کنیم که هریك ازنیمدایره بزرگتر باشد مگر درصورتی که‌قسمتی ازآنها مشترك باشد. بنابراین زاویهٔ DBC که محاط در کمان $\widehat{DBC}$ است منفرجه می‌باشد[۷]. ازطرف دیگر AD وتری ازدایره است و کمان $\widehat{DCA}$ بزرگتر از نیمدایره است و زاویهٔ DBA که دراین کمان محاط است (روبه‌روی کمان AD است) حاده‌است،پس زاویهٔ DBZ (که مکمل آن است) منفرجه‌است. ازطرف دیگر

$\widehat{DZB}=\widehat{DCB}$ (زیرا هردومساوی بازاویهٔ A هستند)

و $DC=DZ$ (زیرا هردومساوی با DA هستند)

بنابراین $\frac{DZ}{DB}=\frac{DC}{DB}$ پس دردومثلث DBZ و DBC زاویهٔ C مساوی‌بازاویهٔ Z واضلاع دوزاویهٔ دیگر (یعنی زوایای به رأس D) متناسب‌هستند وعلاوه براین

هریك از دوزاویهٔ DBC و DBZ منفرجه می‌باشند. پس (بنا به قضیهٔ هفتم مقالهٔ ششم کتاب «اصول اقلیدس»(٦)) زوایای دیگرشان نظیر به‌نظیر متساوی است. پس دو مثلث متشابهند (وچون ضلع BD در آنها مشترك است) پس دو مثلث متساوی می‌باشند و در نتیجه $BZ = BC$

بنابراین : $BC + BE = AE$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به‌برهان پنجم قضیهٔ اول

(۱)- عل : ص ۴- سوتر A : ص۱۴ ونیز ص۶۷- چد : ص:۲۰- چم : ص ۵۳.

(۲)- برهانهای اول ودوم ارشمیدس را به‌عنوان برهانهای اول و سوم قضیهٔ اول نوشتم.

(۳)- دربارهٔ «کتاب الدوائر» رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ ۳ ذیل برهان اول قضیهٔ اول .

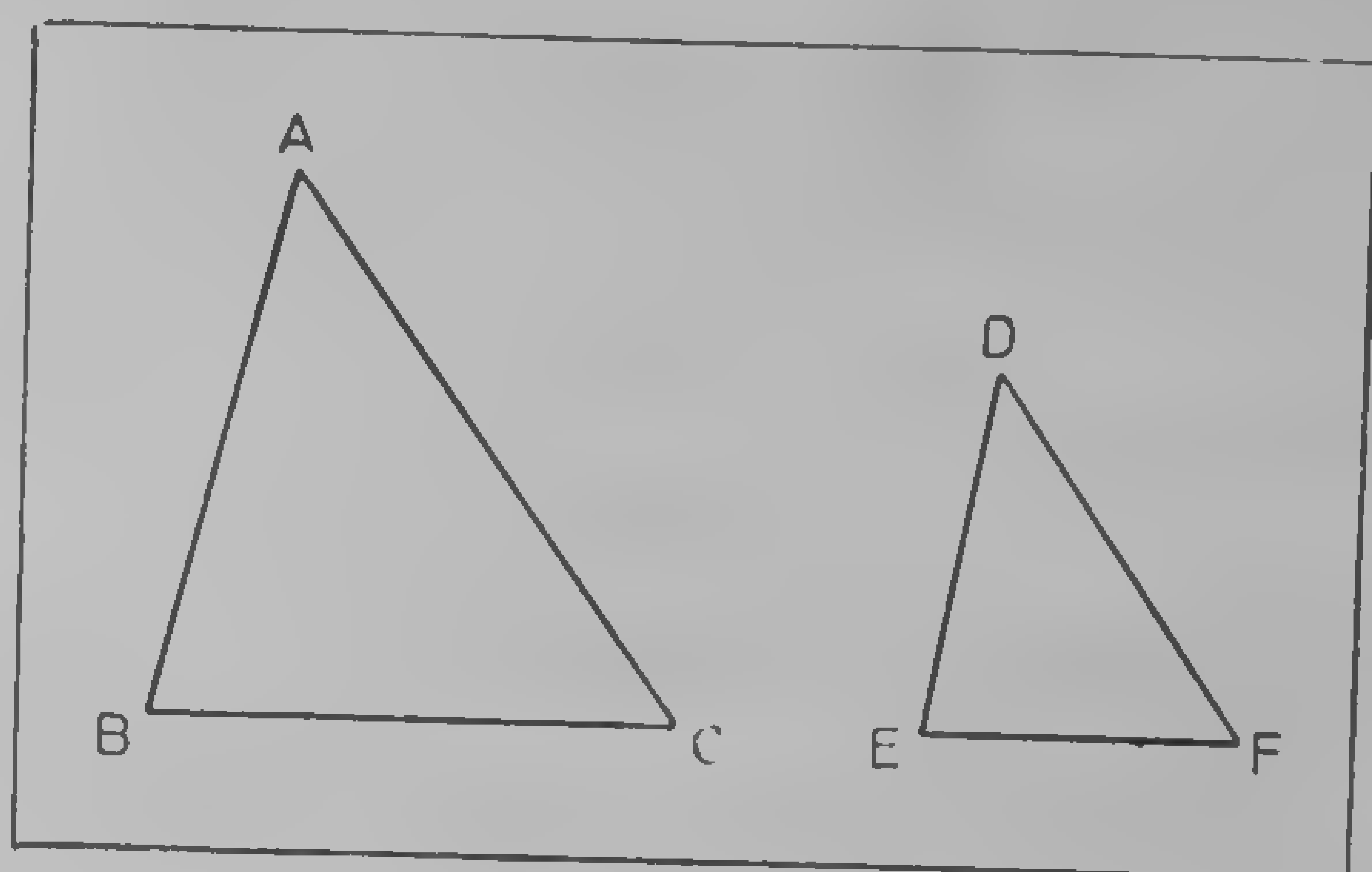
(۴)- عین‌عبارت عربی درنسخهٔ «عل» چنین است : « و وجد بعینه فی‌مسائل للیونیین لائقة ان‌تکون لابلونیوس ترجمة یوحنابن یوسف» .

(۵)- یوحنابن‌یوسف‌بن‌الحارث‌بن‌البطریق القس ، متوفی به‌سال ۳۷۰ هجری قمری است. ازوی «مقالة فی المقادیر المنطقة والصم» به‌شمارهٔ ۲۴۵۷/۷۸ درکتابخانهٔ ملی‌پاریس موجود است (رجوع کنید به‌سوتر M : ص ۶۰ ش ۱۳۱- ترجمهٔ فارسی الفهرست : ص ۵۰۵ - بروکلمان S_1 : ص ۳۸۹)- استاد دربرهان اول‌قضیهٔ دوم (خواهدآمد) نیز به‌این‌ترجمهٔ یوحنابن‌یوسف اشاره کرده‌است.

(۶)- ترجمهٔ فارسی قضیهٔ هفتم ازمقالهٔششم اصول اقلیدس‌این‌است (رجوع کنید به: هیث E ، ج ۲ص ۲۰۶):

هرگاه دردو مثلث یک‌زاویه ازاولی بایك زاویه ازدومی مساوی‌باشد واضلاع یک‌زاویهٔ دیگر ازاولی با اضلاع‌یك زاویهٔ دیگر ازدومی متناسب باشند وعلاوه براین زوایای سوم‌آنها یاهردوحاده ویا هردو منفرجه باشند زوایای آن دو مثلث نظیربه نظیر باهم مساوی‌خواهند بود (یعنی آن دو مثلث متشابه خواهندبود)

چون بیان این‌قضیه به‌اندازهٔ کافی‌رسا نیست فرض‌قضیه را در هردو حالت می‌نویسم:



(شکل۱۲)

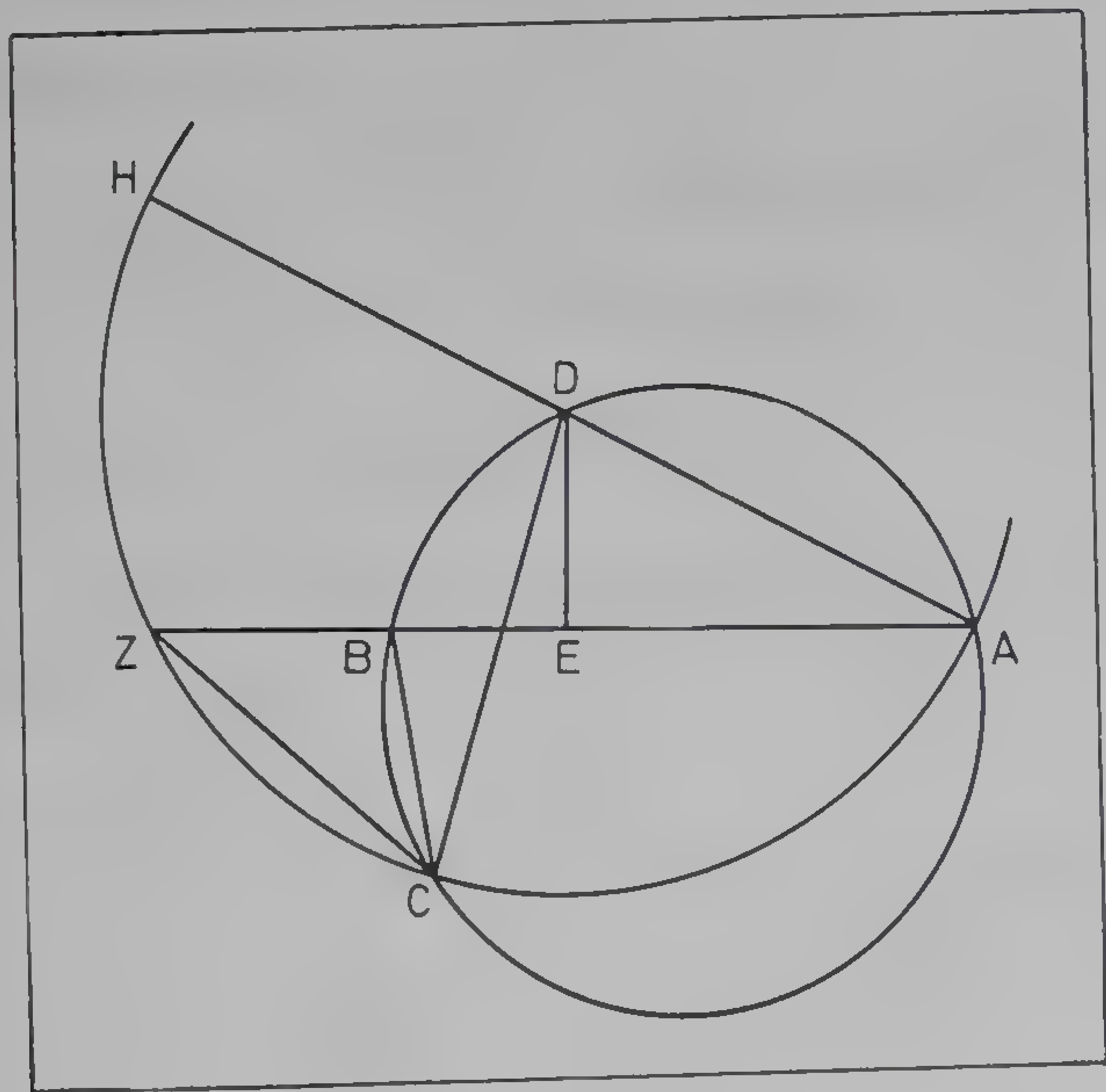
فرض حالت‌اول: $\hat{A} = \hat{D}$ و $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ و $C < ۹۰^\circ$ و $F < ۹۰^\circ$

فرض حالت‌دوم: $\hat{A} = \hat{D}$ و $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ و $C > ۹۰^\circ$ و $F > ۹۰^\circ$

(برای بحث‌آموزنده‌ای دربارهٔ این‌قضیه رجوع کنید به«هیث E» ج ۲ ص ۲۰۸ و۲۰۹).

(۷)- برای برهان‌ساده‌تری‌ازاین‌مطلب رجوع کنید به‌تبصرهٔ‌صفحهٔ۶۶

برهان ششم قضیهٔ اول[۱] **ـ** دومین برهان[۲] از ابوسعید ضریر جرجانی[۳].



(شکل۱۳)

وتر AD را امتداد داده روی آن DH را مساوی با DA جدا می کنیم و به مرکز D و به شعاع DH دایره‌ای رسم می کنیم. واضح است که این دایـره از نقاط A و C می گذرد و ADH قطر آن است. سپس AB را امتداد می‌دهیم تا این دایره را در نقطهٔ Z قطع کند و ZC و DC را رسم می کنیم. داریم :

$\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (زیرا هردو محاطی و روبه‌روی یك کمان هستند)

$\widehat{ADC} = ۲\widehat{AZC}$ (زیرا یکی مرکزی ودیگری محاطی است و روبه روی یك کمان هستند)

پس $\widehat{ABC} = ۲\widehat{AZC}$

اما $\widehat{ABC}=\widehat{AZC}+\widehat{ZCB}$ (زاویهٔ خارجی مثلث ZBC در رأس B)

ازدوتساوی‌اخیر با درنظر گرفتن اینکـه $\widehat{AZC}$ همان $\widehat{BZC}$ است نتیجه

می‌شود:

$$\widehat{BZC}=\widehat{ZCB}$$

یعنی مثلث BZC متساوی‌الساقین است(۴) و $ZB=BC$

بنابراین

$$ZB+BE=BC+BE$$

اما در نیمدایرهٔ ACH نقطهٔ D مرکزاست واز D عمود DE بروتر AZ

فرودآمده‌است پس E وسط AZ است. یعنی $ZB+BE=ZE=EA$

ازدوتساوی اخیر نتیجه میشود: $EA=BC+BE$

واین‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به‌برهان ششم قضیهٔ اول:

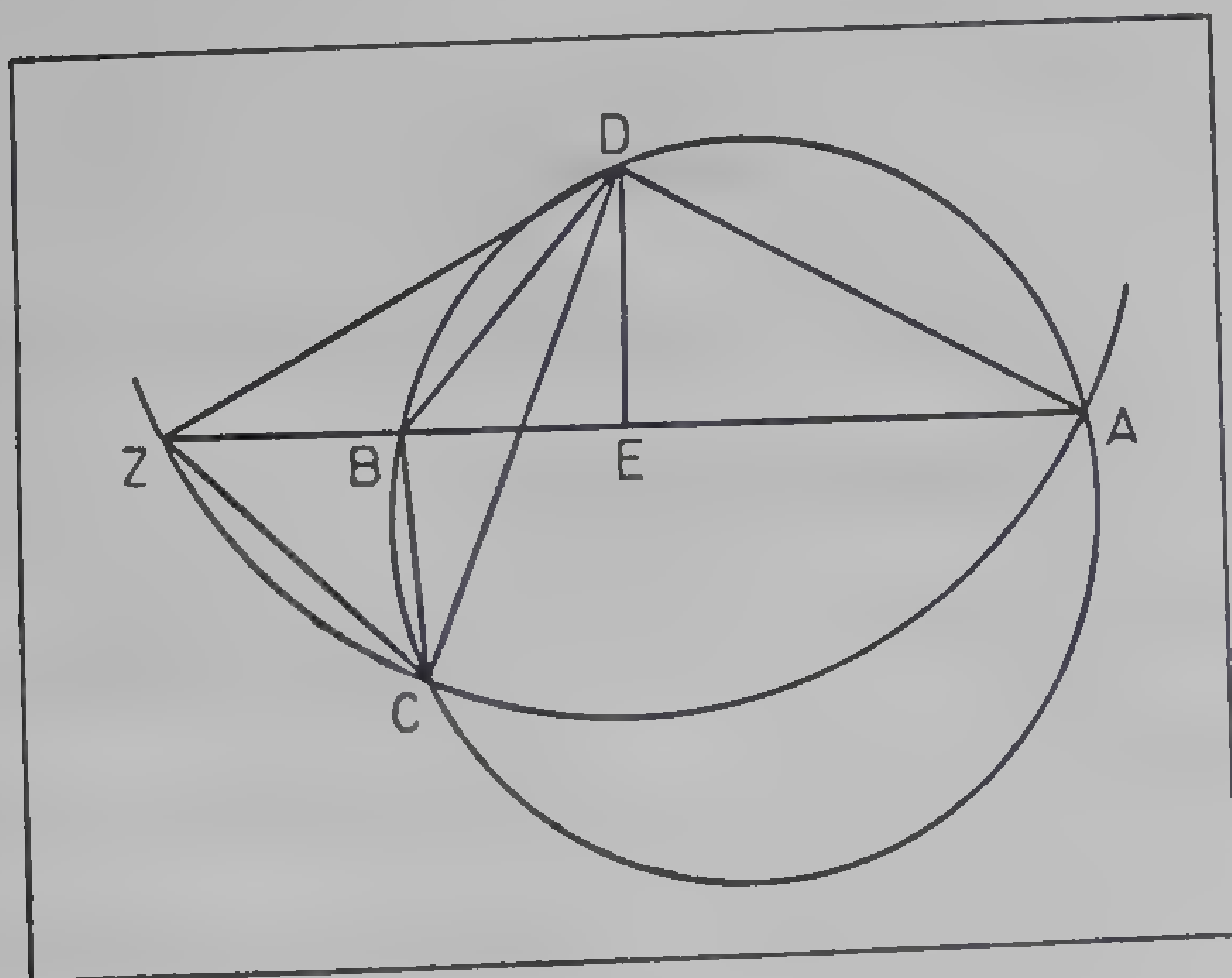
(۱)- عل: ص ۴و۵ - سوتر A: ص۱۵ - چد:ص۲۳-چم: ص۵۷

(۲)- نخستین برهان ابوسعیدجرجانی را به‌عنوان برهان دوم‌قضیهٔ اول نوشتم.

(۳)- دربارهٔ ابوسعیدجرجانی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان‌دوم قضیهٔ‌اول.

(۴)- ابوسعیدجرجانی درضمن برهان این‌قضیه پس‌ازآنکه متساوی‌الساقین بودن مثلث BZC رابه‌ثبوت رسانیده اضافه‌کرده‌است‌که این حکم دربارهٔ هرخط قاطعی‌که ازنقطهٔ A خارج‌شود ودودایرهٔ مرسوم را قطع‌کند درست است. یعنی‌اگرخط دیگری مانند AB' رسم‌کنیم‌که دایرهٔ‌اولی را در نقطهٔ B' ودایرهٔ دومی را درنقطهٔ Z' قطع‌کنـد و B' را به C وصل‌کنیم بازهم مثلث $Z'B'C$ متساوی‌الساقین‌خواهدبود. واین واضح است.

برهان هفتم قضیهٔ اول(۱)- نخستین برهان(۲) از ابوسعید احمد بن محمد بن عبدالجلیل سجزی(۳).



(شکل ۱۴)

وتر AB را امتداد داده روی آن BZ را مساوی با BC جدا می کنیم و DZ و ZC و DC را رسم می کنیم. داریم :

$\widehat{BCZ} = \widehat{BZC}$ (زیرا مثلث BCZ متساوی‌الساقین است)

پس $\widehat{ABC} = ۲\widehat{BCZ} = ۲\widehat{BZC}$ (زاویهٔ خارجی مثلث BCZ در رأس B)

وچون $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (زیرا هردو محاطی و روبه روی یك كمان هستند)

پس $\widehat{ADC} = ۲\widehat{BZC}$. بنابراین دایره‌ای که به مرکز D و به شعاع DA رسم شود از نقاط C و Z می گذرد. زیرا (AD = DC) و زاویهٔ ADC در این دایره زاویه‌ای مرکزی است و زاویهٔ BZC یعنی AZC نصف آن است. پس :

$$AD = DZ$$

بنا بر این دومثلث قائم‌الزاویهٔ ADE و ZDE متساویند[۴] پس $AE = EZ$ $AE = EZ$

و چون $ZE = ZB + BE = BC + BE$ پس $AE = BC + BE$

واین همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان‌هفتم قضیهٔ‌اول :

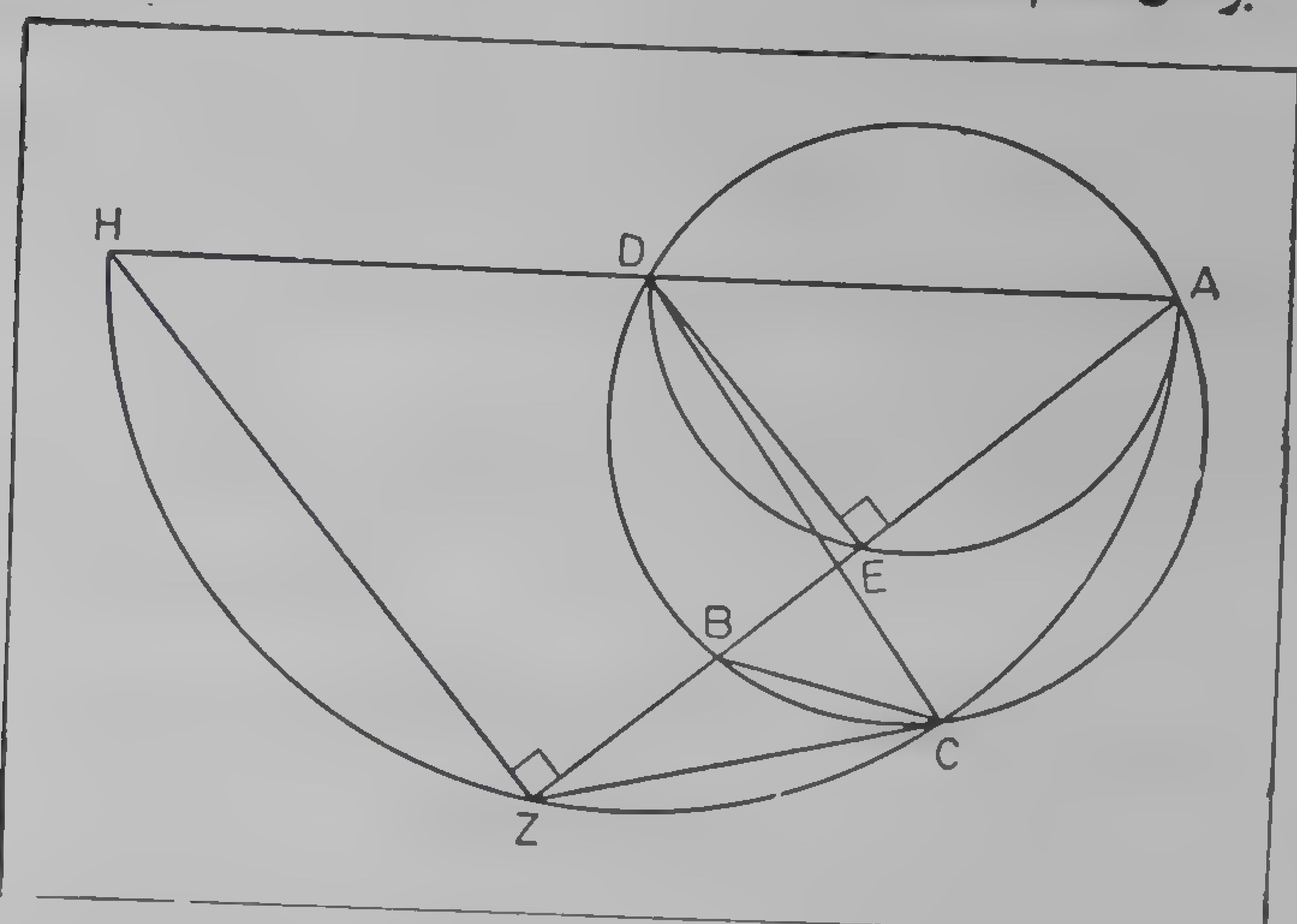
(۱)- عل: ص۵و۶ - سوترA: ص۱۶ - چد: ص۲۲-چم: ص۵۶.

(۲)- دو برهان دیگر از ابوسعیدسجزی به‌عنوان برهان‌هشتم و برهان نهم قضیهٔ‌اول خواهد آمد. - ونیز رجوع کنید به برهانهای اول و چهارم قضیهٔ‌دوم.

(۳)- دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص۵۲۷- و یا به «قربانی - ریاضیدانان» صفحات ۲۵۰ تا ۲۶۸.

(۴)- می‌توان گفت که چون مثلث DZA متساوی الساقین است ارتفاع نظیر قاعدهٔ آن یعنی DE قاعدهٔ AZ رانصف می‌کند پس $AE = ZE$

برهان‌هشتم قضیهٔ‌اول(۱) **-** دومین برهان(۲) از ابوسعیدسجزی(۳).



(شکل۱۵)

به قطر AD نیمدایرهٔ AED را رسم می کنیم و AD را امتداد می‌دهیم و روی‌آن DH را مساوی با DA جدا می کنیم و به قطر AH نیمدایرهٔ ACH را رسم می کنیم و AB را امتداد می‌دهیم تا نیمدایرهٔ اخیر را در نقطهٔ Z قطع کند و ZH و ZC را رسم می کنیم.

(چون دودایرهٔ ACH و AED در نقطهٔ A متماس هستند)(۴) داریم :

$$\frac{AD}{DH}=\frac{AE}{EZ}$$

زیرا دوزاویهٔ AED و AZH قائمه‌اند و دومثلث AED و AZH متشابهند.

وچون AD با DH مساوی‌است پس $AE=EZ$

ازطرف دیگر دوزاویهٔ محاطی ADC و ABC که محاطی وروبه‌روی یك کمان هستند متساویند. وزاویهٔ ADC درنیمدایرهٔ ACH مرکزی‌وزاویهٔ AZC درهمان نیمدایره محاطی است پس : $\widehat{ABC}=۲\widehat{AZC}$

بنابراین $\widehat{BCZ}=\widehat{BZC}$ (یعنی همان $\widehat{AZC}$)

(زیرا از طرفی زاویهٔ ABC که زاویهٔ خارجی مثلث AZC است مساوی است بامجموع $\hat{BZC}$ و $\hat{BCZ}$ و از طرف دیگر $ABC=۲BZC$)

پس $BC=BZ$

و چون $ZE=ZB+BE=AE$ پس :

$$BC+BE=AE$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به‌برهان هشتم قضیهٔ اول :

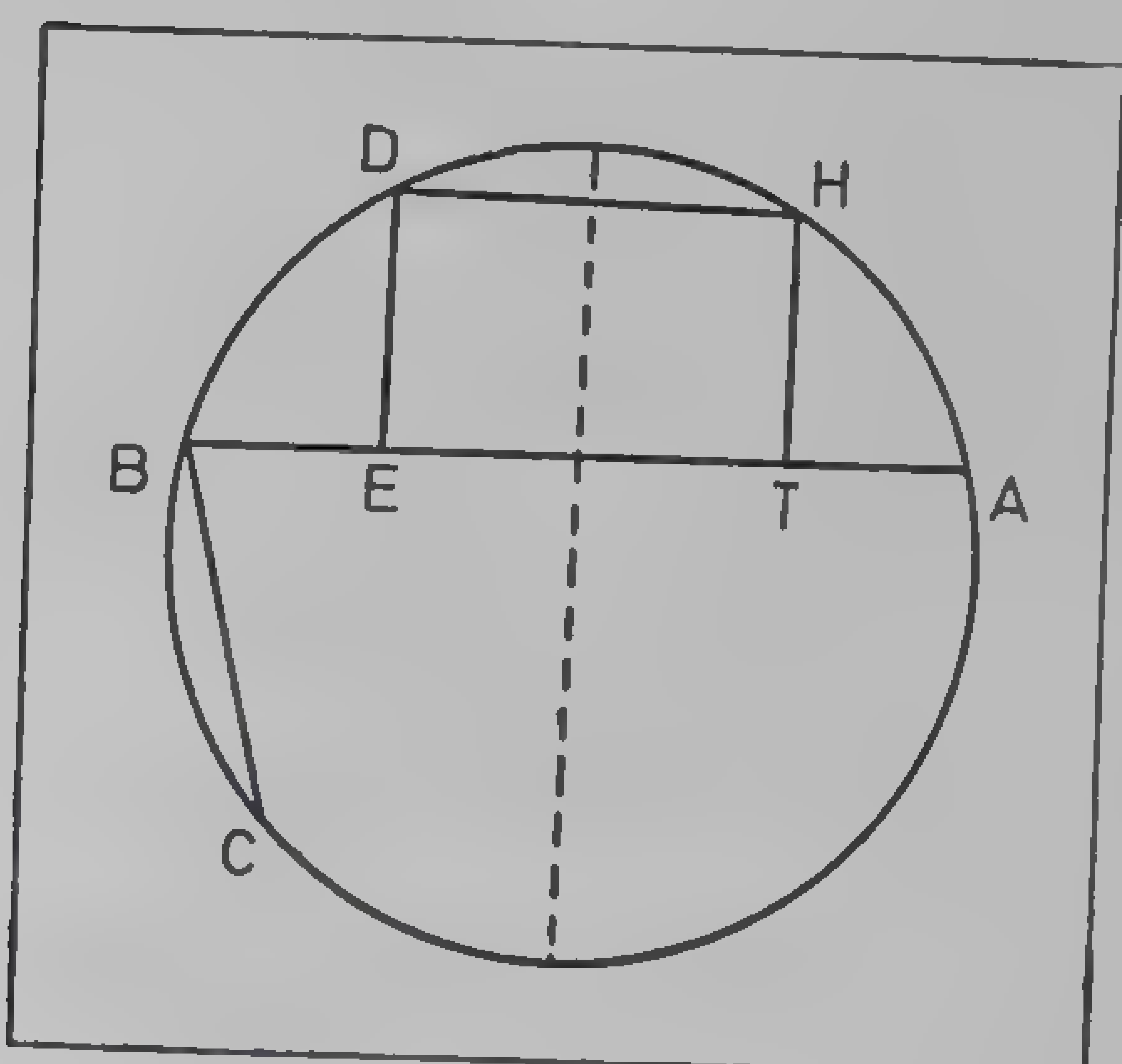
۱- عل: ص ۵و۶ - سوتر A: ص ۱۶- چد : ص۲۴- چم: ص ۵۹

۲- یک‌برهان دیگر ازابوسعید سجزی به عنوان برهان‌هشتم قضیهٔ‌اول گذشت ویک‌برهان دیگر نیزازاو به‌عنوان برهان نهم‌قضیهٔ‌اول خواهدآمد. ونیز رجوع کنید به‌برهانهای اول وچهارم قضیهٔ دوم.

۳- دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع‌کنید به یاد داشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان هشتم قضیهٔ اول.

۴- اینکه دودائرهٔ ACH و AED درنقطهٔ A متماس هستند صحیح‌است ولی یادآوری آن‌دربرهان‌قضیه ضروری‌نیست.

برهان نهم قضیهٔ اول (۱) - سومین برهـان(۲) از ابوسعید سجزی (۳)



(شکل ۱۶)

از نقطهٔ D وسط کـمان $\widehat{ABC}$ خطی به‌موازات AB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ H قطع کند وازنقطهٔ H خطی به - مـوازات DE رسم می‌کنیم تـا AB را در نقطهٔ T قطع کند. داریم :

$\widehat{BD} = \widehat{AH}$ (زیرا دو وتر DH و AB متوازیند)

و چون $\widehat{AD} = \widehat{DC}$ (زیرا نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است)

پس $\widehat{DH} = \widehat{BC}$ (نتیجهٔ کم کردن‌تساوی اول ازتساوی دوم‌عضو به‌عضو)

و بنابراین $DH = ET = BC$ (زیرا شکل DHTE مستطیل است)
از طرف دیگر واضح است که $AT = BE$ (زیرا هر دو نسبت به قطری از دایره که عمود بر AB رسم شود قرینهٔ یکدیگرند). بنابراین:

$$AT + TE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

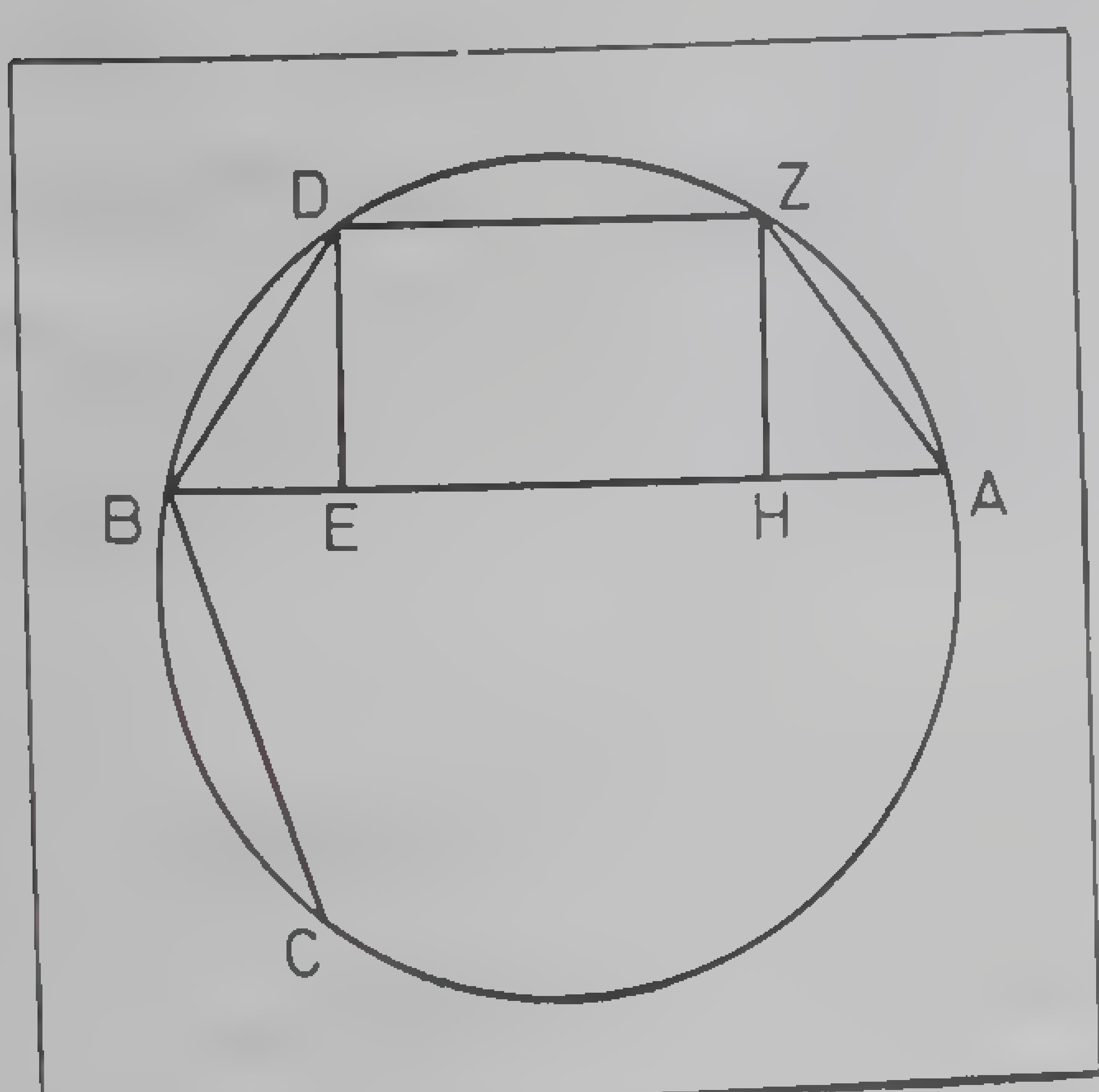
یادداشتهای مربوط به برهان نهم قضیهٔ اول:

(۱)- عل: ص ۶ - سوتر A : ص ۱۷ - چد: ص۹ و ۱۰- چم: ص ۴۰ و ۴۱

(۲)- دو برهان دیگر برای قضیهٔ اول از ابوسعید سجزی به عنوان برهانهای هفتم و هشتم گذشت - و نیز رجوع کنید به برهانهای اول و چهارم قضیهٔ دوم.

(۳)- دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان هفتم قضیهٔ اول.

برهان دهم قضیهٔ اول (۱) - نخستین برهان (۲) از قاضی ابوعلی حسن بن حارث حبوبی (۳).



(شکل۱۷)

کمان $\widehat{AZ}$ را مطابق با شکل مساوی با کمان $\widehat{DB}$ جدا کرده عمود ZH را بر AB فرود می‌آوریم و AZ و DB و DZ را رسم می‌کنیم.

چون دو زاویهٔ ZHA و DEB قائمه‌اند و دو زاویهٔ ZAB و DBA متساویند (زیرا هر دو

محاطی ورو به‌رو به‌دو کمان متساوی $\widehat{ZDB}$ و $\widehat{DZA}$ هستند پس دومثلث قائم‌الزاویهٔ AZH و BDE متساوی می‌باشند. پس $ZH = DE$ و چون این دوپاره خط علاوه برمتساوی بودن متوازی هم‌هستند پس $EH = ZD$ (زیرا شکل DZHE مستطیل است) از طرف دیگر $DZ = BC$ (زیرا کمانهای رو بـه‌روی آنها متساویند) بنابراین $EH = BC$ واز آنجا :

$$AH + HE = EB + BC$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به‌برهان دهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل: ص۶- سوتر A : ص۱۷ چد: ص۱۲ - چم : ص۴۴

(۲)- یک‌برهان دیگرازابوعلی حبوبی به‌عنوان برهان‌یازدهم قضیهٔ اول خواهدآمد.

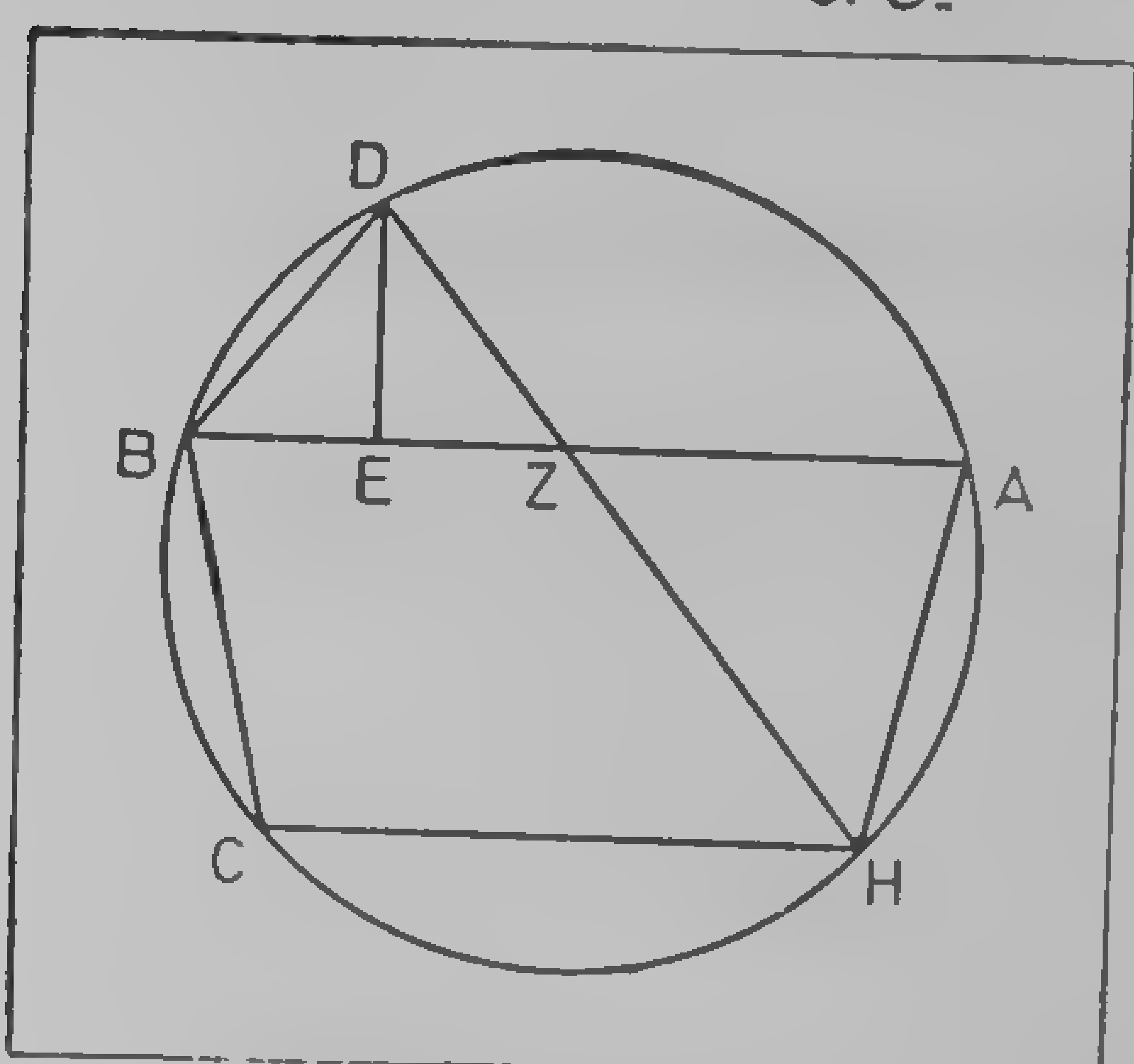
(۳)- نام‌ابوعلی حبوبی درنسخهٔ «عل» حسین نوشته‌شده ولی حسن صحیح است- سوتر لقب‌اورابه‌علت بی‌نقطه‌بودن‌نسخهٔ «عل» جنوبی‌خوانده ولی‌حبوبی‌صحیح‌است - در بارهٔ وی رجوع کنید به «بیرونی‌نامه»ص۵۳۰

برهان یازدهم قضیهٔ اول [۱] - دومین برهان [۲] ازابوعلی حبوبی [۳]

روی EA پاره‌خط EZرا مساوی‌با EB جدا کرده DZ را امتداد می‌دهیم تادایره را درنقطهٔ H قطع کند و پاره‌خطهای DB و AH و HC را رسم می‌کنیم. داریم .

$$\widehat{AZH} = \widehat{DZB}$$

(دو زاویهٔ متقابل به‌رأس)



(شکل۱۸)

$\hat{AHZ} = \hat{DBZ}$ (محاطی و روبه‌رو به یك کمان)

وچون $\hat{DZB} = \hat{DBZ}$ (زیرا DE عمودمنصف پاره خط BZ است)پس،

$\hat{AHZ} = \hat{AZH}$ یعنی $AH = AZ$

ازطرف دیگر $\hat{AHD} = \hat{DHC}$ (محاطی و روبه‌رو به‌دو کمان متساوی $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{DC}$)

پس $\hat{DHC} = \hat{AZH}$ (دوچیزمتساوی بایك‌چیز). امااین‌دوزاویه‌نسبت‌به دو خط AB و CH و قاطع ZH متبادل داخلی هستند و چون متساویند پس CH با AB موازی‌است پس $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{BC}$

یعنی $AH = BC$ وچون دیدیم که $AH = AZ$ پس $AZ = BC$

بنابراین : $AZ + ZE = EB + BC$

و این‌همان‌چیزی است که‌می‌خواستیم ثابت کنیم.

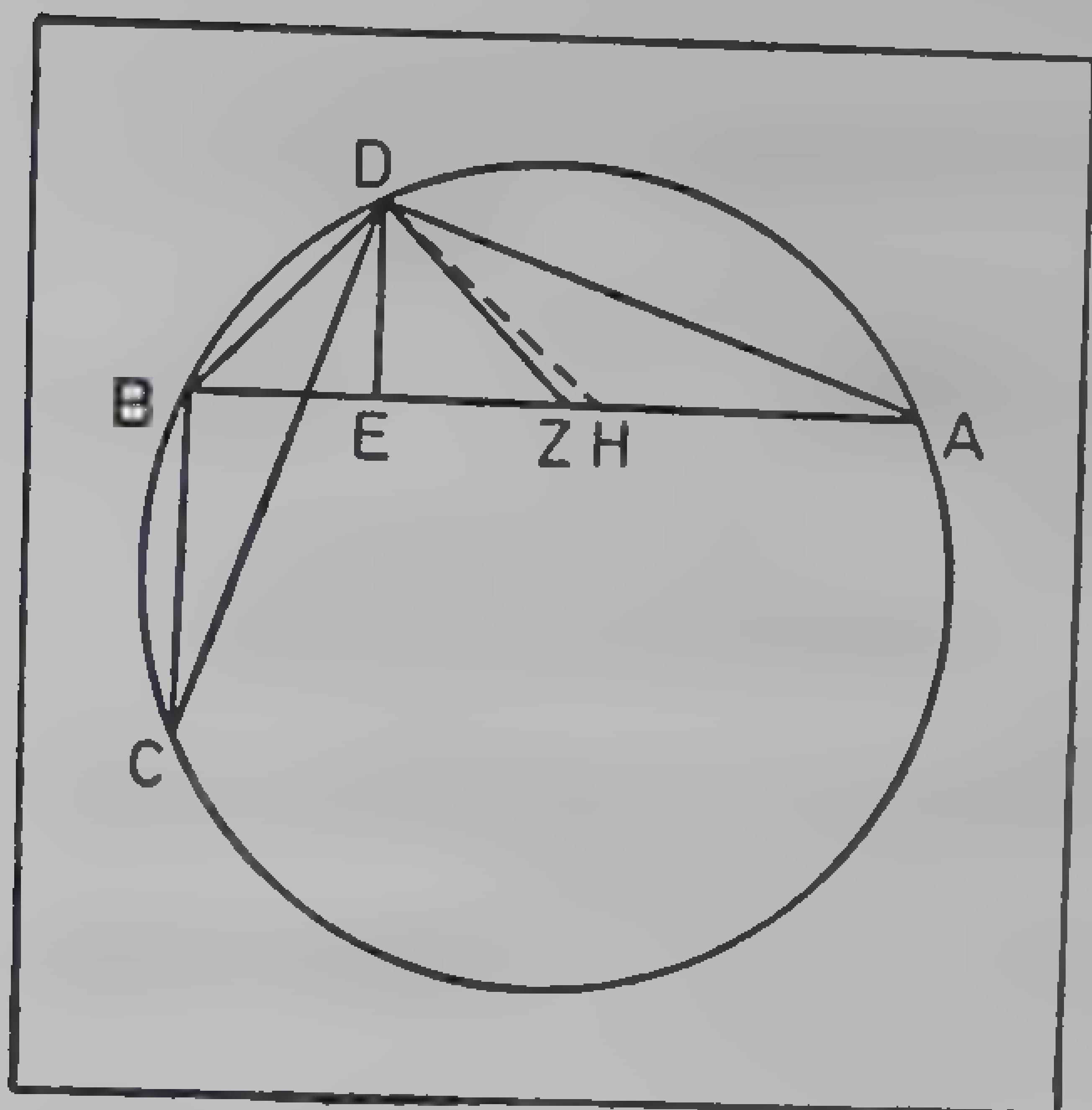
یادداشتهای مربوط به‌برهان یازدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل: ص ۶و۷- سوتر A : ص ۱۷ و ۱۸ - چد: ص ۱۷- چم: ص ۴۹ و ۵۰

(۲)- نخستین برهان ابوعلی حبوبی به‌عنوان برهان دهم قضیهٔاول گذشت .

(۳)- رجوع کنید به‌یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل‌برهان دهم قضیهٔ اول

برهان دوازدهم قضیهٔ اول[۱] ـ نخستین برهان[۲] از ابونصر منصور بن ـ علی بن عراق [۳].



(شکل ۱۹)

روی AE پاره خط EZ را مساوی با EB جدا کرده نقطهٔ D را به نقاط A و Z و B و C وصل می کنیم.

پاره خط AZ نه می‌تواند از BC بزرگتر باشد و نه کوچکتر. زیرا اگر مثلاً AZ از BC بزرگتر باشد و روی AZ پاره خط AH را مساوی با BC جدا کنیم (نقطهٔ H بین نقاط A و Z واقع خواهد شد) حاصل می‌شود:

$AH = BC$ (بنا به‌فرض)

$AD = DC$ (زیرا D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است)

$\hat{A} = \hat{C}$ (زیرا هر دو محاطی و روبه‌رو به یك کمان هستند)

بنابراین مثلث DAH با مثلث DCB مساوی است (درحالت دوضلع وزاویهٔ بین آنها) پس $DH = DB$

اما چون DE عمود منصف پاره‌خط BZ است پس $DZ = DB$ [۴]

از دوتساوی فوق نتیجه می‌شود $DH = DZ$ یعنی مثلث DZH متساوی ـ

الساقین است و بنابراین $\widehat{DZH} = \widehat{DHZ}$

ازطرف دیگر مثلث BDH ، چنانکه دیدیم ، نیزمتساوی‌الساقین است پس:

$$\widehat{DBH} = \widehat{DHB} \text{ یا } \widehat{DHZ}$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود : $\widehat{DZH} = \widehat{DBH}$

یعنی زاویهٔ خارجی Z از مثلث BZD مساوی با زاویـهٔ داخلی B از همان مثلث‌است واین‌ممکن نیست . (بنابراین AZ نمی‌تواند از BC بزرگتـر باشـد) به همین‌طریق می‌توان ثابت کرد که AZ نمی‌تواند از BC کوچکتـر باشـد. پس $AZ = BC$ وبنابراین :

$$AZ + ZE = EB + BC$$

واین‌همان‌چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان دوازدهم قضیهٔ اول :

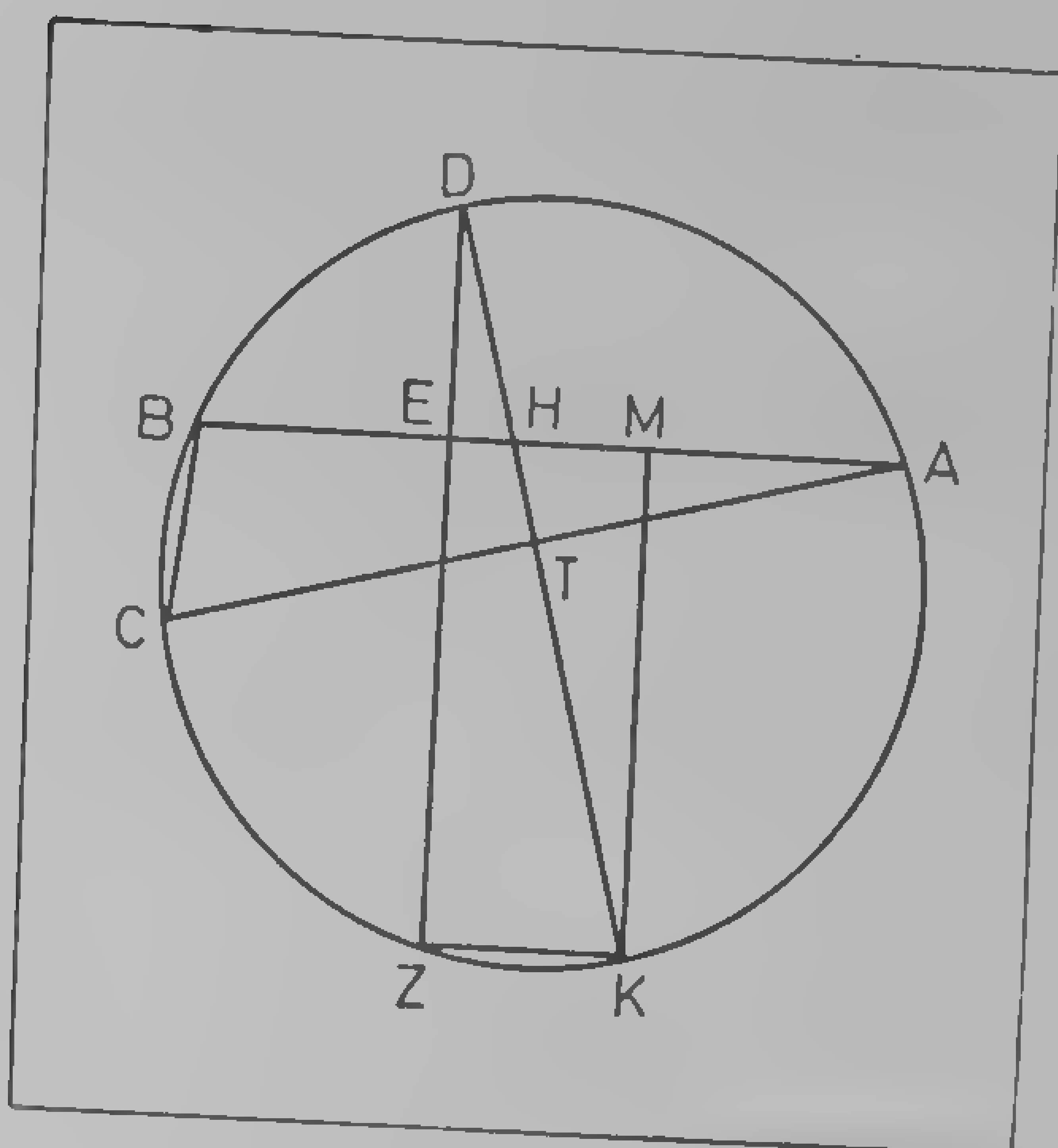
(۱)ـ عل : ص۷ ـ سوترA: ص۱۸ ـ چد: ص۱۳ ـ چم : ص۴۵.

(۲)ـ یک‌برهان دیگرازابونصرعراق به عنوان برهان شانزدهم قضیهٔ اول خواهدآمد. ـ ونیزرجوع کنید به برهان‌دوم قضیهٔ دوم و برهان سوم قضیهٔ چهارم .

(۳)ـ ابونصر منصوربن‌علی‌عراق‌جیلانی‌مولی‌امیرالمومنین، معروف به ابونصرعراق، استادابوریحان بیرونی بوده است . رجوع کنید به‌کتاب

«قربانی : ریاضیدانان ایرانی» صفحات ۲۲۱ تا ۲۳۹ـ وی را گاهی ابونصر جعدی نیز نامیده‌اند .
(رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ ۳ ذیل برهان دوم قضیهٔ دوم)

برهان سیزدهم قضیهٔ اول(۱)- نخستین برهان(۲) از ابوعبدالله محمد بن- احمدالشنّی(۳) .



(شکل ۲۰)

عمود DE را امتداد می‌دهیم تا دایره را درنقطهٔ دیگر Z قطع کند. وقطر DK ازدایره را که از نقطهٔ D می‌گذرد رسم می‌کنیم تا AB را درنقطهٔ H و AC را درنقطهٔ T قطع کند. این قطر بر AC عمود است (زیرا نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است).

اکنون KM را به موازات ZE رسم کرده Z را به K وصل می‌کنیم و می‌گوییم دومثلث AHT و DHE متشابهند (زیرا هردو قائم‌الزاویه‌اند وزوایای به رأس H از آنها باهم مساوی‌است) بنابراین $\widehat{TAH} = \widehat{EDH}$

پس $BC = ZK$ (وترهای روبه روبه زوایای محاطی متساوی)

ازطرف دیگرچهارضلعی ZKME مستطیل‌است زیرا زاویهٔ Z ازآن رو به رو به قطر DK یعنی قائمه‌است وزوایای M و E ازآن نیزقائمه‌اند پس $ZK = EM$

وچون دیدیم که $ZK = BC$ پس $EM = BC$

وچون عمود KM مساوی باعمود ZE است پس [۴]$AM = BE$ بنابراین

داریم : $AM + ME = BE + BC$

واین همان‌چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

یادداشتهای مربوط به برهان‌سیزدهم قضیهٔ‌اول :

(۱)- عل: ص۷ - سوترA: ص۱۸و۱۹ - چد: ص۱۱-چم:ص۴۳.

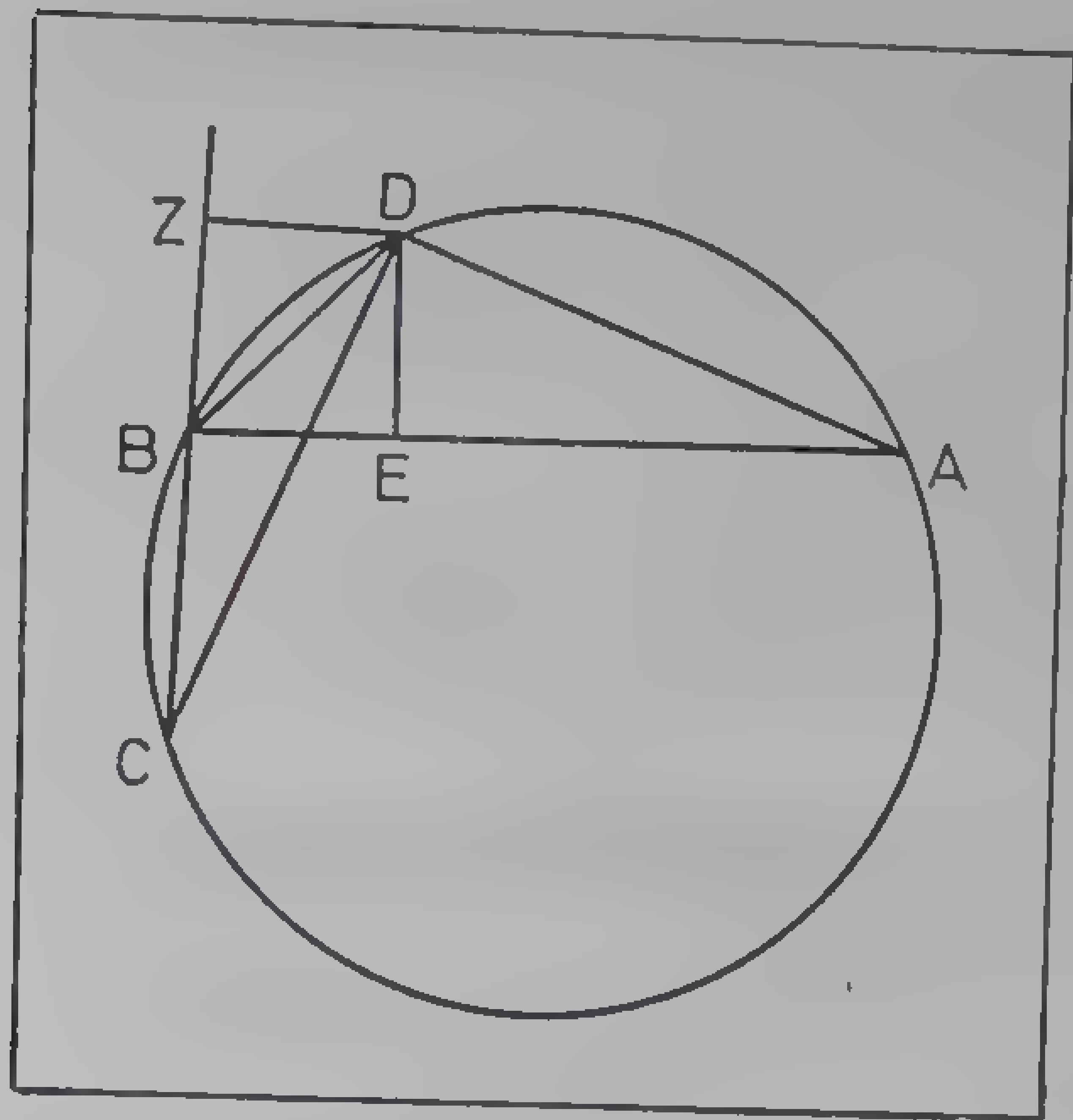
(۲)- یك‌برهان‌دیگر ازابوعبدالله‌الشنّی به‌عنوان برهان‌پانزدهم قضیهٔ اول خواهدآمد. و نیزرجوع کنید به برهان پنجم قضیهٔ‌دوم وآخرین برهان قضیهٔ‌چهارم وتبصرهٔ(۲) ذیل برهان‌پنجم قضیهٔ‌دوم.

(۳)- دربارهٔ ابوعبدالله‌الشنّی رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه» ص۵۳۰.

(۴)- دوعمود KM و ZE نسبت‌به‌قطری ازدایره‌که عمودبرAB رسم‌شود قرینهٔ یکدیگراند وهمچنین است دوپاره‌خط AM و EB.

برهان‌چهاردهم قضیهٔ‌اول(۱) - دومین برهـان(۲) از آذرخور ابن استاد جشنس(۳).

(استاد ازبین همهٔ برهانهایی که برای قضیهٔ‌اول در کتاب «استخراج‌الاوتار» آورده این‌برهان رابرای ذکردر کتـاب «قانـون مسعودی» انتخاب کرده است - رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص۲۸۷) .



(شکل۲۱)

پاره‌خط CB را امتداد داده از نقطهٔ D عمود DZ را بر آن فرودمی‌آوریم و پاره‌خطهای AD و DC را رسم می کنیم. (این دوپاره خط متساوی‌اند). (زیرا نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است). ازطرف دیگر دوزاویهٔ A و C که هر دومحاطی وروبه‌روی کمان $\widehat{BD}$ هستند متساویند. پس دومثلث قائم‌الزاویهٔ AED و CZD (درحالت وتر ویك زاویهٔ حاده) با هم مساویند و $DZ = DE$

و همچنین

$$CZ = AE \qquad (۱)$$

ازتساوی $DE = DZ$ نتیجه می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDZ و BDE که در وترمشترک کند با هم مساویند. پس:

$$ZB = EB \qquad (۲)$$

و از روی شکل واضح‌است که $CZ = ZB + BC$ و با نظر به رابطهٔ (۲).

$$CZ = EB + BC \qquad (۳)$$

ازتساویهای (۱) و (۳) حاصل می‌شود:

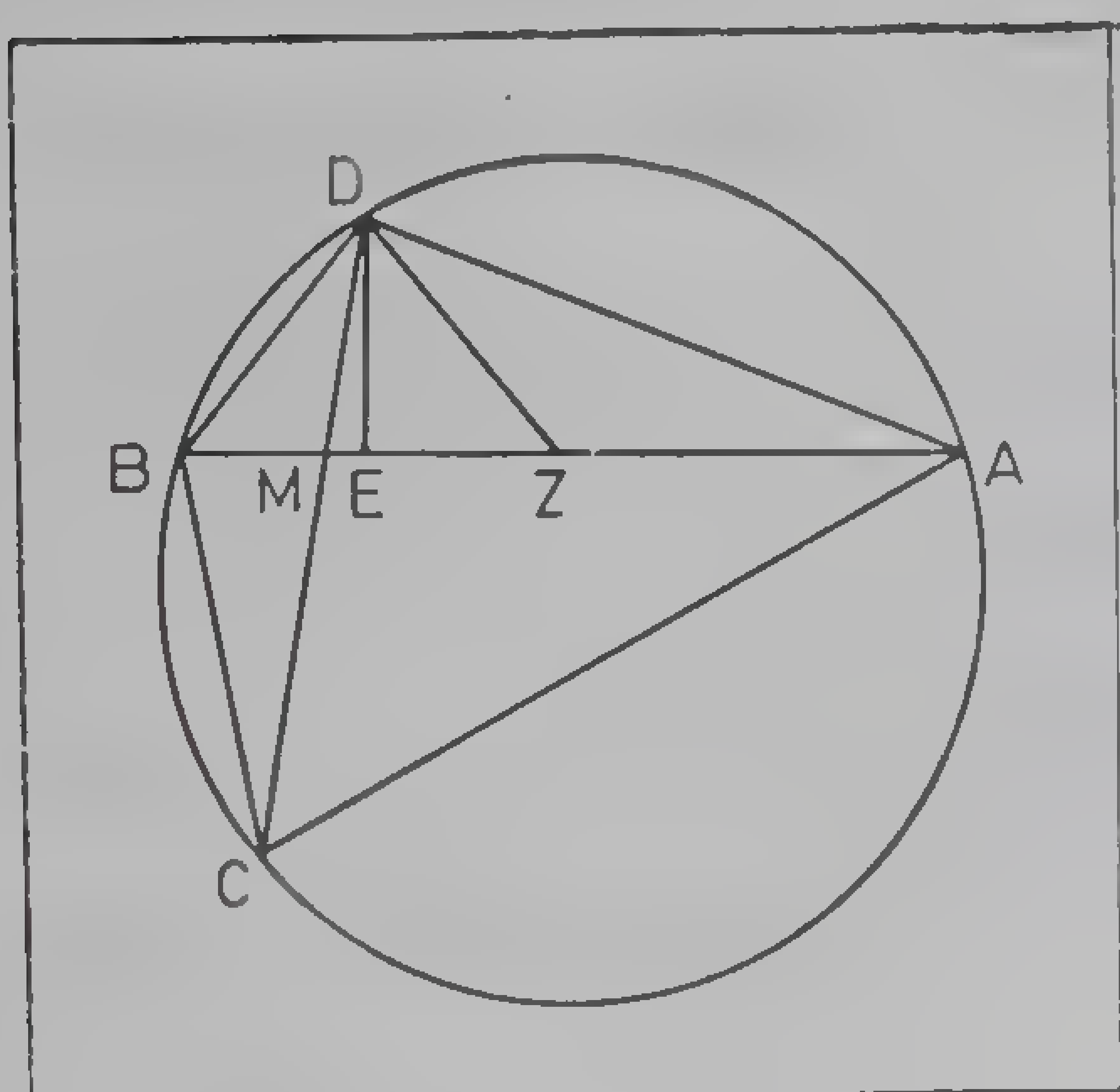
$$AE = EB + BC$$

و این‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان چهاردهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص۸ - سوتر A : ص۲۰ - چد : ص۶ - چم: ص۳۶.
(۲)- نخستین برهان از آذرخورا به عنوان برهان چهارم قضیهٔ‌اول گذشت.
(۳)- دربارهٔ ابوالحسن آذرخورا رجوع کنیدبه‌یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان‌چهارم قضیهٔ‌اول.

برهان‌پانزدهم قضیهٔ‌اول(۱) - دومین برهان(۲) ازابوعبدالله‌الشنّی (۳).



(شکل۲۲)

روی EA پاره خط EZ را مساوی‌با EB جدا کرده DA و DZ و DC و DB و AC و BC را رسم می کنیم.

دومثلث DZB و DAC هر دو متساوی‌الساقین هستند و دوزاویهٔ DCA و DBZ ازآنها که محاطی و رو به روی کمان $\widehat{AD}$ هستند متساویند پس :

$$\widehat{ADC}=\widehat{ZDB}$$

حال اگر فصل مشترك DC و AB را نقطهٔ M بنامیم و زاویـهٔ ZDM را که بین دوزاویهٔ متساوی فوق‌الذکر مشترك‌است حذف کنیم باقی می‌ماند :

$$\widehat{BDC}=\widehat{ZDA}$$

از طرف دیگر در دومثلث ZDA و BDC داریم AD = DC (زیرا نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ است) و DZ = DB (زیرا مثلث DBZ متساوی الساقین است) پس دومثلث مذکور متساویند ونتیجه می‌شود :

$$AZ = BC$$

بنابراین :

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

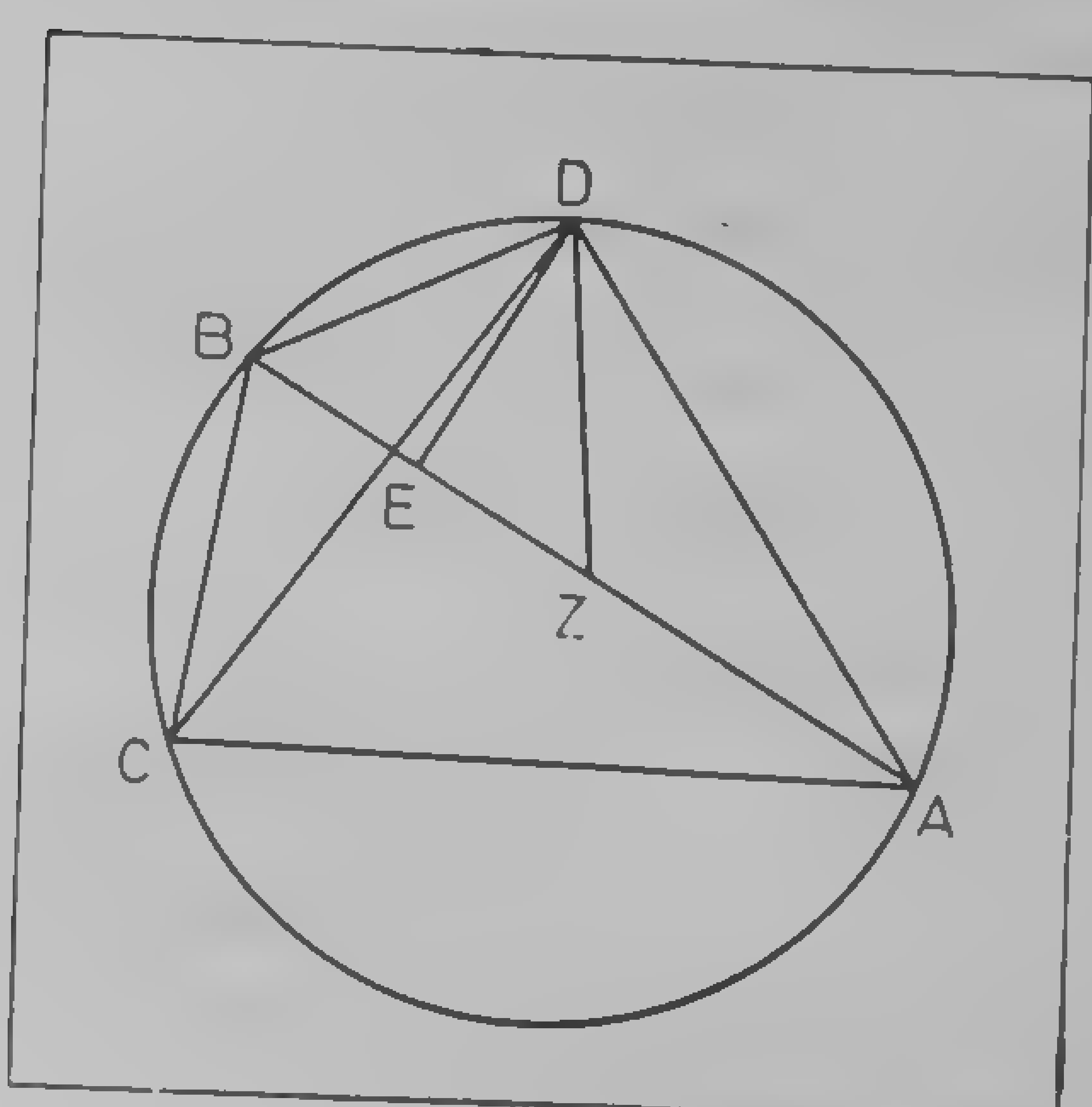
یادداشتهای مربوط به برهان پانزدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل:ص۹و۱۰ - سوتر A:ص۲۱ - چد:ص۱۶ - چم: ص۴۹.

(۲)- نخستین برهان از ابوعبدالله الشنّی به عنوان برهان سیزدهم قضیهٔ اول گذشت - ونیز رجوع کنید به برهان پنجم قضیهٔ دوم و برهان چهارم قضیهٔ چهارم وتبصرهٔ ۲ ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم .

(۳)- دربارهٔ ابوعبدالله الشنّی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ ۳ ذیل برهان سیزدهم قضیهٔ اول.

برهان شانزدهم قضیهٔ اول(۱) - دومین برهان(۲) از ابونصر منصور بن علی- بن عراق(۳) .



(شکل۲۳)

از روی AB پاره‌خط AZ را مساوی با BC جدا و پاره‌خطهای AD و BD و DZ را رسم می‌کنیم . داریم :

AD = DC و AZ = BC و $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ (زیرا هر دو محاطی و رو به روی کمان $\widehat{BD}$ هستند). بنابراین دومثلث ZDA

و BDC متساوی‌اند و در نتیجه $DZ = DB$ یعنی مثلث DBZ متساوی الساقین است و بنابراین ارتفاع DE از آن قاعدهٔ BZ را نصف می کند. یعنی داریم :

$BE = EZ$ وچون $AZ = BC$ پس:

$$AZ + ZE = AE = BE + BC$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

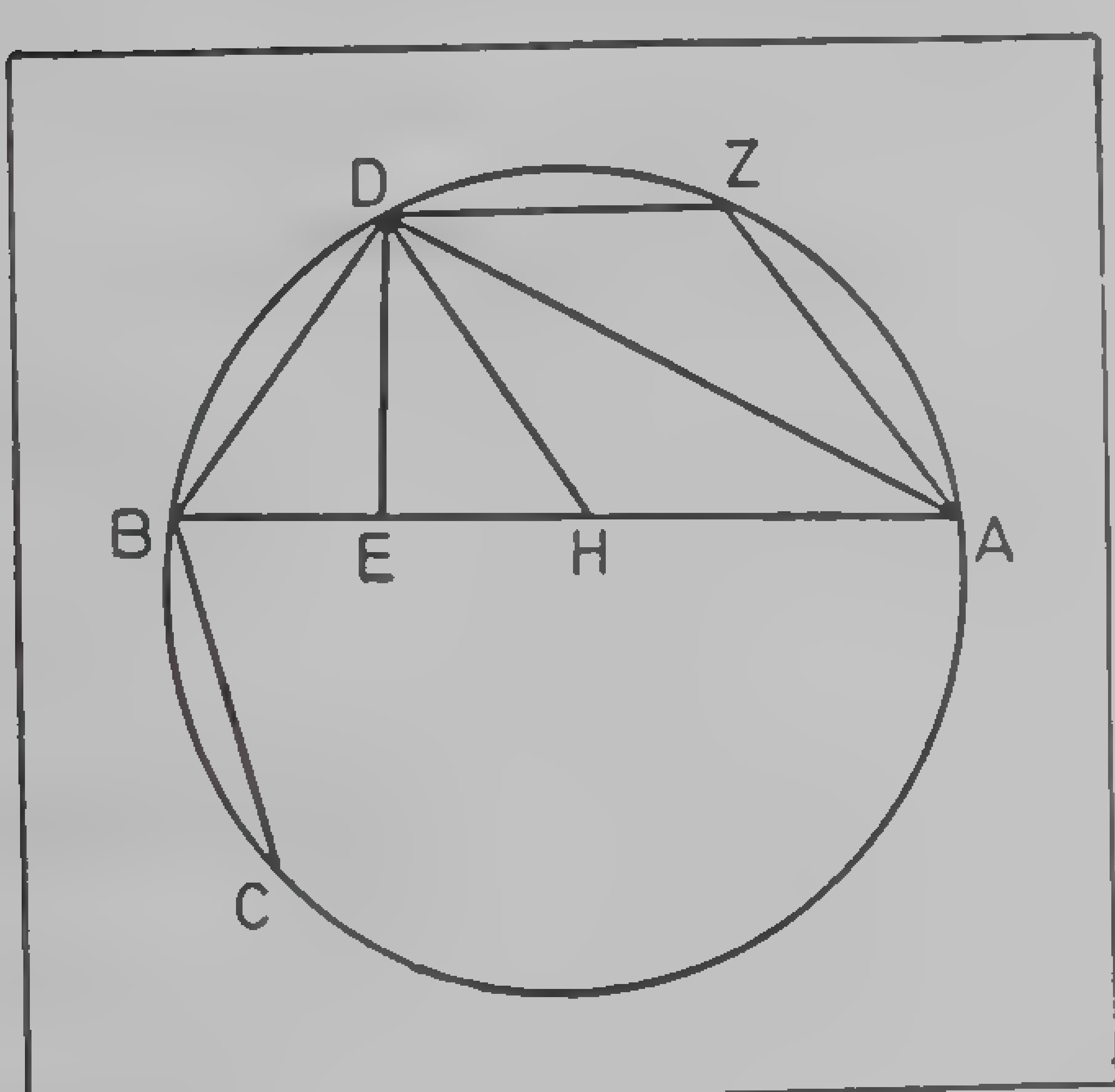
یادداشتهای مربوط به برهان شانزدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص۱۰ - سوتر A : ص۲۱و۲۲ - این برهان درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» نیامده‌است. درنسخهٔ «عل» دردنبال این برهان برهان‌دیگری برای قضیهٔ چهارم ذکر شده‌است.

(۲)- نخستین برهان ابونصرعراق به‌عنوان برهان‌دوازدهم قضیهٔ اول گذشت - و نیزرجوع کنید به برهان‌دوم قضیهٔ دوم و برهان‌سوم قضیهٔ چهارم.

(۳)- دربارهٔ ابونصرعراق رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ(۳) ذیل برهان‌دوازدهم قضیهٔ اول.

برهان‌هفدهم قضیهٔ اول(۱) - ازابوعلی‌حسن‌بن‌حسین‌بصری(۲).



(شکل۲۴)

کمان $\widehat{DZ}$ را مساوی با کمان $\widehat{DB}$ و پاره خط EH را مساوی با EB جدا کرده پاره‌خط‌های DB و DZ و AZ و AD و DH را رسم می کنیم.

چون $\widehat{DZ} = \widehat{DB}$ پس:

$\widehat{ZAD} = \widehat{DAB}$ و چون

$DB = DH$ پس:

$$\widehat{DBA} = \widehat{DHE} \quad (۱)$$

وچون چهارضلعی BDZA محاطی است داریم :

$$\widehat{AZD} + \widehat{ABD} = ۱۸۰° \quad (۲)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\widehat{AZD} + \widehat{DHE} = ۱۸۰° \quad (۳)$$

از طرف دیگر $\widehat{DHE} + \widehat{DHA} = ۱۸۰°$ (۴)

از تساویهای (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\widehat{AZD} = \widehat{CHA}$

پس زوایای دومثلث AZD و AHD نظیر به نظیر متساوی‌اند و چون ضلع AD در آنها مشترک است پس این دومثلث متساوی می‌باشند و در نتیجه $AZ = AH$.

اما $AZ = BC$ زیرا دو وتر روبه‌رو به کمانهای متساوی هستند (چون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است و $\widehat{BD} = \widehat{DZ}$ پس $\widehat{AZ} = \widehat{BC}$) بنابراین $AH = BC$

و چون $HE = BE$ پس :

$$AE = BE + BC$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان هفدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص ۱۰ و ۱۱ - سوتر A ص۲۲ - چد : ص ۹ - چم: ص ۴۰

(۲)- ابوعلی حسن بن حسین (یا حسن) معروف به ابن هیثم یاابوعلی بصری درسال ۹۶۵م/۳۵۴ ه دربصره متولد شد. بعداً به مصر مهاجرت

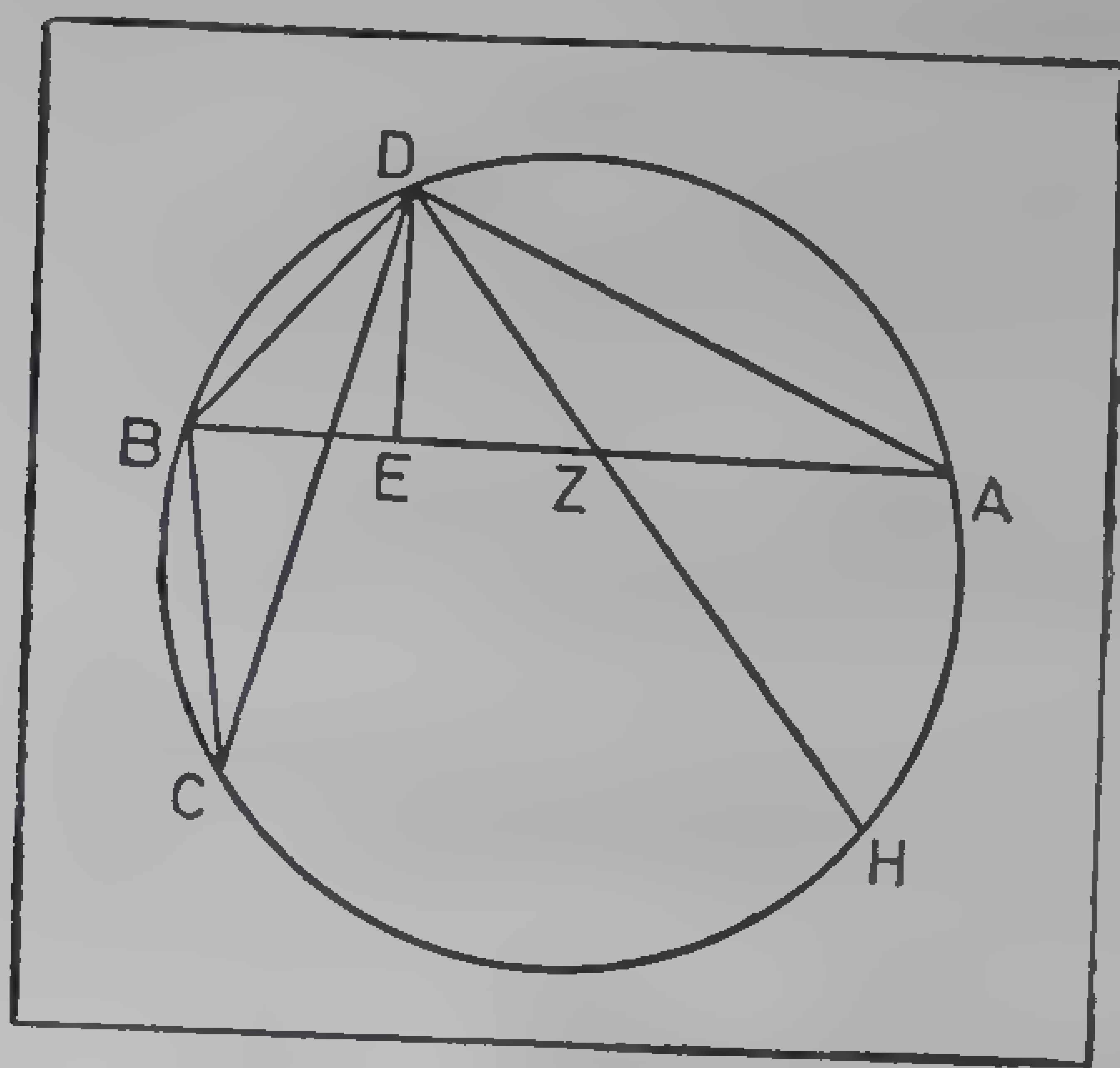
کرد تاآخرعمر درآنجا ماند وبه سال ۱۰۳۹م/۴۳۰ ه یاکمی پس ازآن در قاهره درگذشت. وی منجم وریاضیدان وطبیب وبزرگترین فیزیکدانهای دورهٔ اسلامی واز بزرگترین محققان در علم نور شناسی بود. ابن‌هیثم از بزرگترین دانشمندان دورهٔ اسلامی است وطرز فکر اورا مانند طرز فکر دکارت می‌دانند. نزدیك به صدکتاب ورساله تألیف کرده‌است که معروفترین آنها کتاب «المناظر» است که موضوع آن نورشناسی است وکمال‌الدین ابوالحسن فارسی ریاضیدان ونورشناس ایرانی (۶۶۵ - ۷۱۸ ه ق) آن را آراسته وکتاب معروف «تنقیح‌المناظرلذوی‌الابصار والبصائر» را درتنقیح آن تألیف کرده است.

دربارهٔ کتاب «تنقیح‌المناظر» رجوع کنید به «قربانی: دوریاضی‌دان ایرانی» برای کسب اطلاع ازفهرست آثار موجود ابن هیثم رجوع کنید به «بروکلمان G_1» ص ۶۱۷ و «بروکلمان S_1» ص ۸۵۱ و «سوتر M» ص ۹۱ به بعد.

برای کسب اطلاع ازاحوال ابن‌هیثم رجوع کنید به «لغت‌نامهٔ دهخدا» مادهٔ ابن هیثم ونیزرجوع کنید به «سارتن I» ج۱ ص ۷۲۱ ودایرةالمعارف اسلامی ودایرةالمعارف بریتانیکا وغیره

برهان هجدهم قضیهٔ اول(۱) - نخستین برهان(۲) ازاستادبیرونی

(درنسخه‌های چاپی «استخراج‌الاوتار» این برهان، مانند تبصره‌ای، دردنبال برهان دیگری آمده‌است. امادر نسخهٔ «عل» بیرونی آن راجداگانه نوشته و به نام خود ثبت کرده‌است.)



(شکل۲۵)

پاره‌خطهای DB و DC و DA را رسم کرده از روی EA پاره‌خط EZ را مساوی با EB جدامی کنیم و DZ رارسم کرده آن را امتداد می‌دهیم تا دایره‌را درنقطهٔ H قطع کند. می‌دانیم که AD = DC زیـرا وترهـای دو کمان متساوی هستنـد. و چون دو مثلث DBE و DZE متساویند (DE عمودمنصف پاره‌خط BZ است) پس :

(۱) $$DB = DZ$$

از طرف دیگر (۲) $$\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$$

زیرا هر دومحاطی و روبه‌روی یك کمان هستند.

(اکنون ملاحظه می کنیم که دردومثلث ADZ و CDB يك‌ضلع‌ويك‌زاويه ازاولی بایك ضلع‌ويك‌زاويه‌ازدومی نظیر به‌نظیرمساوی هستنـد و برای تساوی آن دومثلث کافی است تساوی‌يك زاويهٔ دیگرازآنها را ثابت کنیم(۳)) .

می گوییم $$\widehat{DZB} = \widehat{ZDA} + \widehat{ZAD}$$ (زاويهٔ‌خارجی‌مثلث)

وچون دوزاويهٔ DZB و DBZ باهم مساويند ازتساوی فوق نتیجه می‌شود :

$$\widehat{DBZ} = \widehat{ZDA} + \widehat{ZAD}$$

بنابراین

$$\widehat{DBZ} - \widehat{ZAD} = \widehat{ZDA} \qquad (۳)$$

اما

$$\text{اندازهٔ } \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = \text{اندازهٔ } \widehat{DBZ}$$

و

$$\text{اندازهٔ } \frac{\overset{\frown}{DB}}{۲} = \text{اندازهٔ } \widehat{ZAD}$$

پس از تساوی (۳) نتیجه می‌شود:

$$\text{اندازهٔ } \frac{\overset{\frown}{DB}}{۲} - \text{اندازهٔ } \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = \text{اندازهٔ } \widehat{ZDA}$$

اما چون نقطهٔ D وسط کمان ABC است طرف راست تساوی اخیر مساوی است با:

$$\text{اندازهٔ } \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \qquad \text{یعنی:} \qquad \text{اندازهٔ } \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \text{اندازهٔ } \widehat{ZDA}$$

و از طرف دیگر

$$\text{اندازهٔ } \frac{\overset{\frown}{AH}}{۲} = \text{اندازهٔ } \widehat{ZDA} \qquad \text{(زاویهٔ محاطی)}$$

بنابراین $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{BC}$

پس:

$$\hat{BDC} = \hat{ZDA} \qquad (۴)$$

از تساویهای (۱) و (۲) و (۴) معلوم می‌شود که دو مثلث ADZ و CDB متساویند.

بنابراین $AZ = BC$ و

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان هیجدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل: ص ۱۱ - سوتـر A : ص۲۳ - چد : ص ۱۴ (وسلکت انافی‌تبیین ...) - چم: ص ۴۶

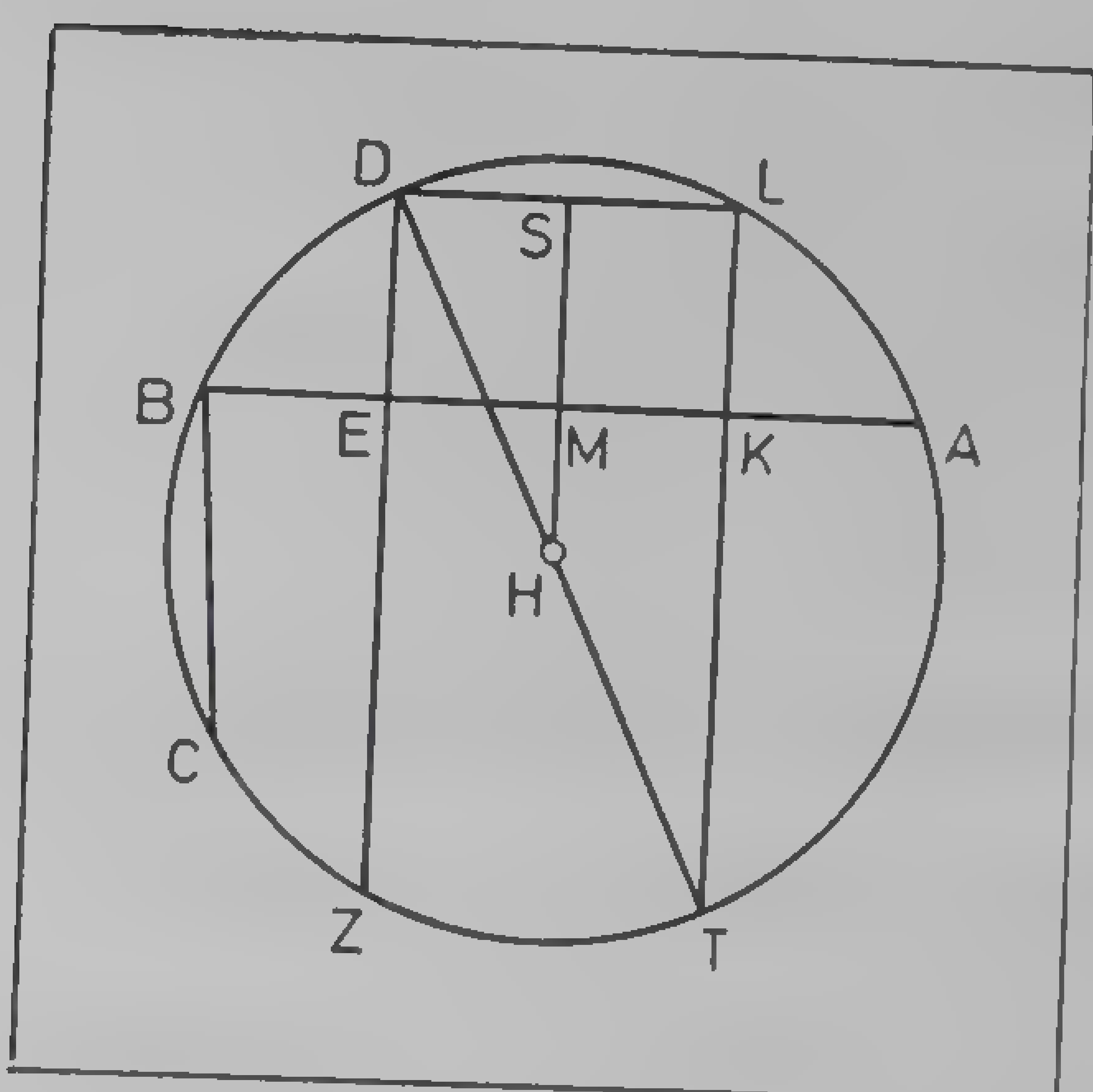
(۲)- چهاربرهان دیگـر ازاستاد بیرونـی برای قضیهٔ اول در ذیل خواهد آمد)

(۳)- آنچه در داخل دوپرانتز نوشته‌ام درمتن نیامده است

برهان‌نوزدهم قضیهٔ‌اول(۱) **-** دومین برهان ازاستاد.

(درنسخه‌های چاپی «استخراج‌الاوتار» این برهان دردنبال بـرهان دیگری آمده‌است. اما درنسخهٔ «عل» بیرونی‌آن راجداگانه نوشته و به نام خود ثبت کرده است.)

عمود DE را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ Z قطع کند وقطر DHT ازدایره را که ازنقطهٔ D می‌گذرد رسم‌می‌کنیم (H مرکزدایره است) و از نقطهٔ T خط TKL را بموازات DZ رسم می‌کنیم.



(شکل ۲۶)

چون DZ و TL ازدو انتهای‌یك قطر به‌موازات یکدیگررسم‌شده‌اندداریم: $D\widehat{C}Z = T\widehat{A}L$. اکنـون D رابه L وصل می‌کنیـم . زاویهٔ DLT قائمـه است

(زیرا روبه‌رو به قطر DT است) وعلاوه‌براین می‌دانیم که‌زوایای LKE و DEK قائمه‌اند. پس‌چهارضلعی DEKL مستطیل‌است و بنابراین LD = EK .

اکنون ازنقطهٔ H مرکزدایره خط HMS را به‌موازات DZ رسم‌می‌کنیم. این‌خط برو‌ترهای AB و DL عموداست و آنها را نصف می‌کند پس LS = SD و AM = MB وواضح‌است که EM = MK پس نتیجه می‌شود که AK = EB و LD = KE = BC (زیرا کمان $\widehat{LD}$ با کمان $\widehat{BC}$ مساوی‌است) پس داریم :

$$AK + KE = EB + BC$$

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

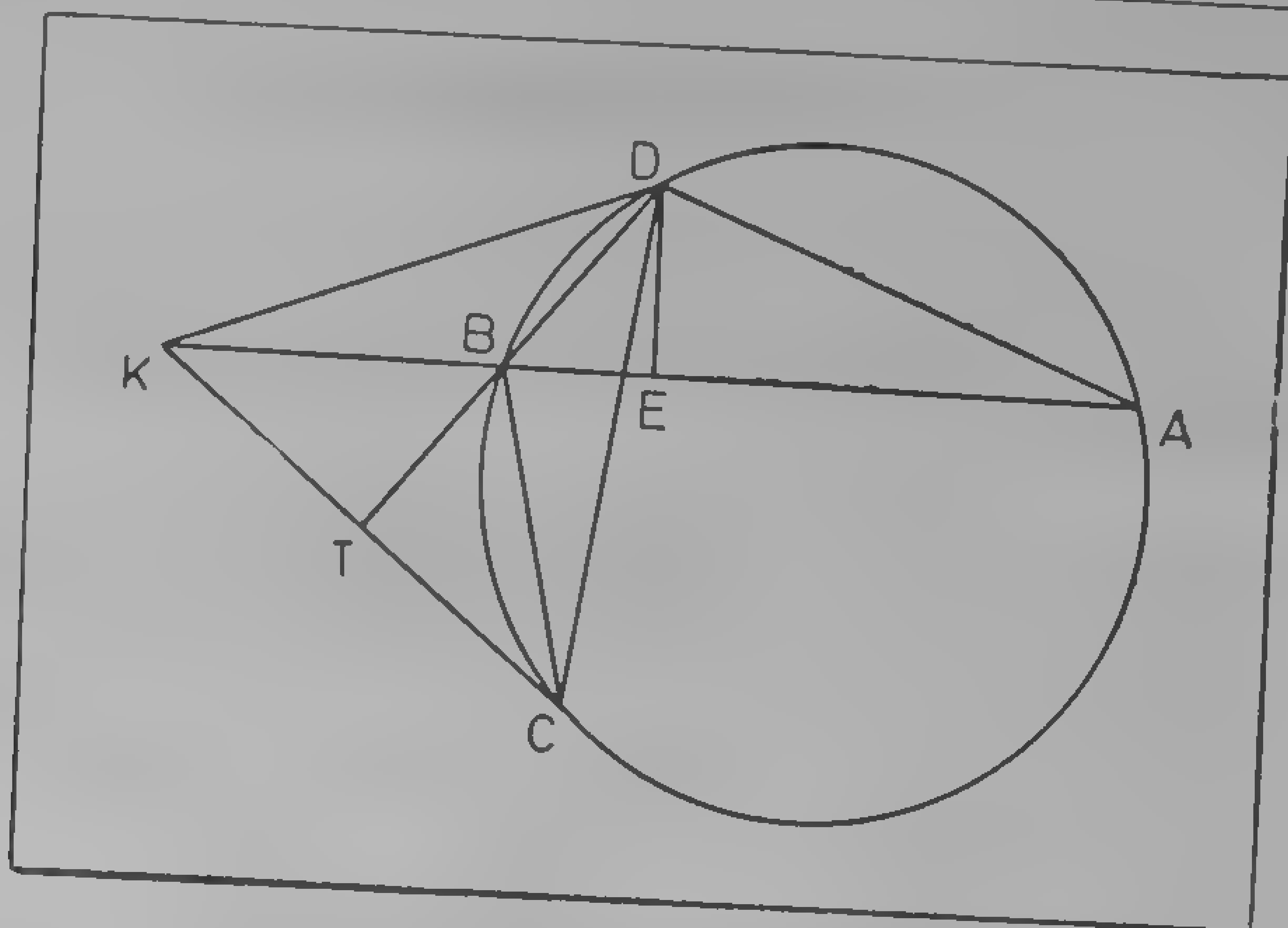
یادداشتهای مربوط به برهان نوزدهم قضیهٔ اول :

(۱)- عل : ص ۱۱ و۱۲ - سوتر A : ص ۲۳ و۲۴ - چد: ص۱۰ سطر چهارم به بعد : «ولکثرةاستعمالی هذه‌المقدمة ...» - چـم : ص ۴۱ سطرچهارم ازآخر به بعد

برهان‌بیستم قضیهٔ‌اول(۱) - سومین‌برهان از استاد.

(این برهان را استاد از کتاب «فی‌المسائل المفیده والجوابات‌السدیده فی‌علل زیج‌الخوارزمی(۲)» تألیف خود نقل کرده‌است).

برطبق‌آنچه در نسخه‌های موجود « استخراج الاوتار » نوشته شده است در این برهان اشتباهی هست که بعداً به شرح و رفع‌آن خواهیم پرداخت . (رجوع کنید‌به‌تبصرهٔ ذیل همین‌برهان).



(شکل۲۷)

این برهان در نسخه‌های موجود «استخراج الاوتار» با مختصر اختلافی چنین بیان شده است:

پاره‌خط AB را ازطرف B امتداد داده روی‌آن BK رامساوی با BC جدا و پاره‌خطهای CK و DK و DA و DC را رسم می کنیم. سپس‌ازنقطهٔ B عمود BT را بر CK فرود می‌آوریم . چون مثلث BKC متساوی‌الساقین است عمود BT قاعدهٔ‌آن یعنی CK را نصف می کند (KT = TC) .

سپس برهان چنین ادامه می‌یابد : چون زاویهٔ ABT زاویهٔ خارجی مثلث TBK است (رجوع کنید به تبصرهٔ ذیل‌همین برهان) پس :

$$\hat{ABT} = \hat{BTK} + \hat{BKT} \quad (1)$$

و نیزچون زاویهٔ DBC زاویهٔ‌خارجی مثلث BTC است پس :

$$\widehat{DBC} = \widehat{BCT} + \widehat{BTC} \qquad (۲)$$

اما زوایای BTC و BTK قائمه‌اند (و$\widehat{BCT} = \widehat{BKT}$) بنابراین از تساویهای (۱) و(۲) نتیجه‌می‌شود :

$$\widehat{ABT} = \widehat{DBC}$$

ازطرف دیگر داریم :

$$\widehat{ABT} + \widehat{TBK} = \widehat{DBC} + \widehat{CBT} = ۱۸۰°$$

بنابراین سه نقطهٔ D و B و T بریك استقامت قرار دارند و خط راست DBT عمودمنصف پاره‌خط CK است. بنابراین $DC = DK$. اما $DA = DC$ پس $DA = DK$ پس عمود DE پاره‌خط AK را نصف می کندو بنابراین:

$$AE = EB + BK$$

وچون $BK = BC$ پس :

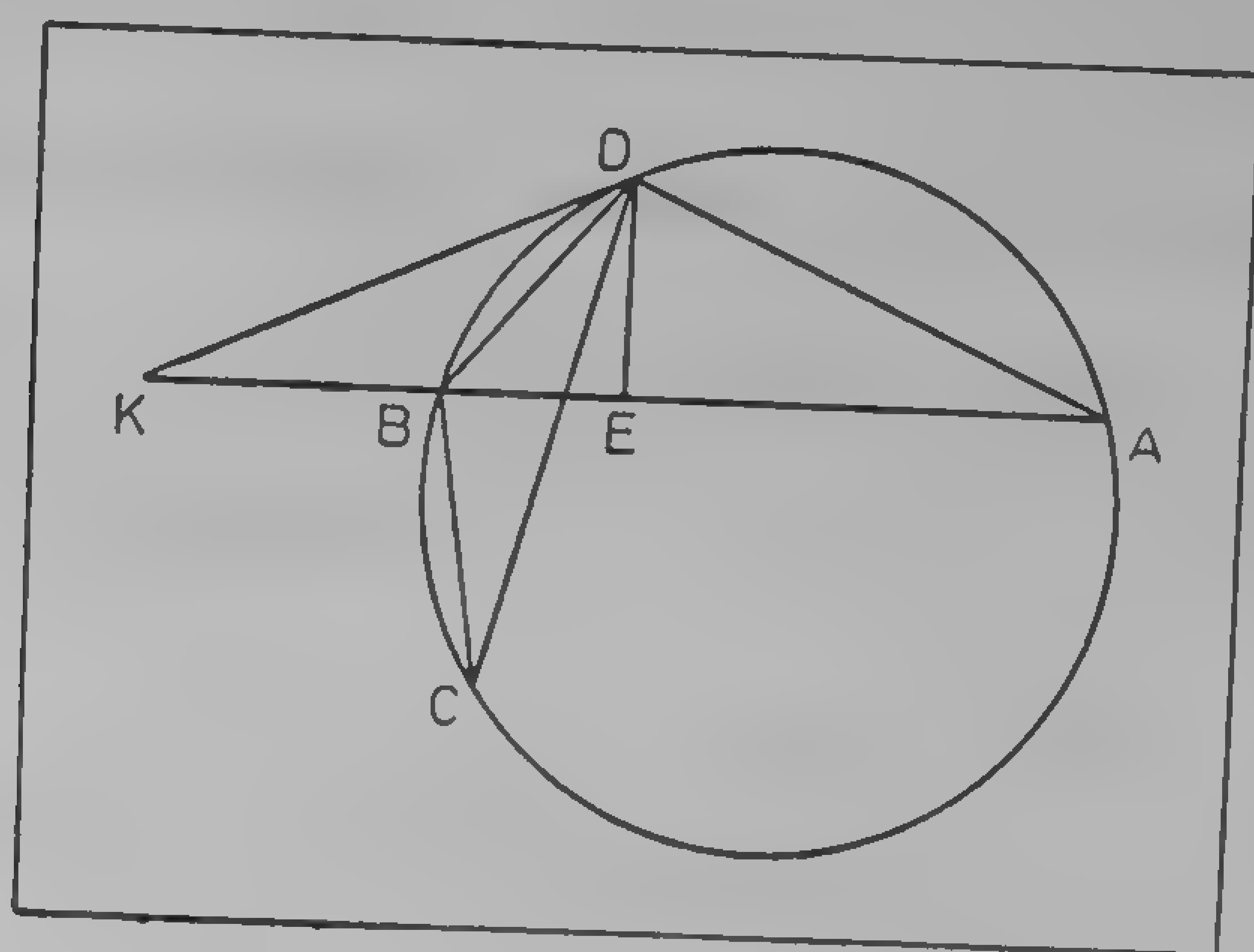
$$AE = EB + BC$$

واین همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره - دراین برهان اشتباهی‌رخ داده وآن‌این است که نوشته‌شده‌است: «ازنقطهٔ B عمود BT را بر CK فرود می آوریم» وپیش از آنکه ثابت شود که سه نقطهٔ D و B و T بریك استقامت‌هستندنوشته شده‌است که: «زاویهٔ DBC زاویهٔ خارجی‌مثلث BTC است»

احتمال اینکه این اشتباه از ابوریحان بیرونی باشد بسیار کم است. شاید استاد اثبات این امر را که سه نقطهٔ D و B و T بریك استقامت هستند پیش از این مسئله در کتاب «فی المسائل المفیده...» آورده باشد.

درهرصورت این اشتباه را می‌توان به وجه زیر رفع و برهان را کامل کرد:



(شکل۲۸)

AB را ازطرف B امتداد داده روی آن BK رامساوی با BC جدا و پاره‌خطهای DK و DA و DB و DC را رسم می‌کنیم.

واضح است که دوزاویهٔ DBK و DBA مکمل یکدیگراند. اکنون دو زاویهٔ DBC و DBA را درنظرمی گیریم. این‌دوزاویه هردومحاطی هستند واولی روبه‌روی کمان $\overset{\frown}{DAC}$ ودومی روبه‌روی کمان $\overset{\frown}{DA}$ است. اما $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DBC}$ پس اندازهٔ مجموع دوزاویهٔ DBC و DBA مساوی است بانصف مجموع اندازه‌های دو کمان $\overset{\frown}{DAC}$ و $\overset{\frown}{DBC}$ یعنی ۳۶۰ درجه پس این دوزاویه مکمل یکدیگرند.

اکنون می گوییم که چون زوایای DBC و DBK هر دومکمل زاویهٔ DBA

هستند باهم مساویند. بنا براین دومثلث DBC و DBK درحالت دوضلع و زاویهٔ بین آنها متساویند (BD مشترك و BK = BC و $\widehat{DBC} = \widehat{DBK}$)ودر نتیجه

$$DC = DK$$

وچون می‌دانیم که DA = DC (زیرا نقطهٔ D وسط کمان ABC است) پس DA = DK یعنی‌مثلث DAK متساوی‌الساقین‌است و بنابراین عمود DE قاعدهٔ AK ازمثلث را نصف می کند و بنابراین $AE = EB + BK$

و یا $AE = EB + BC$

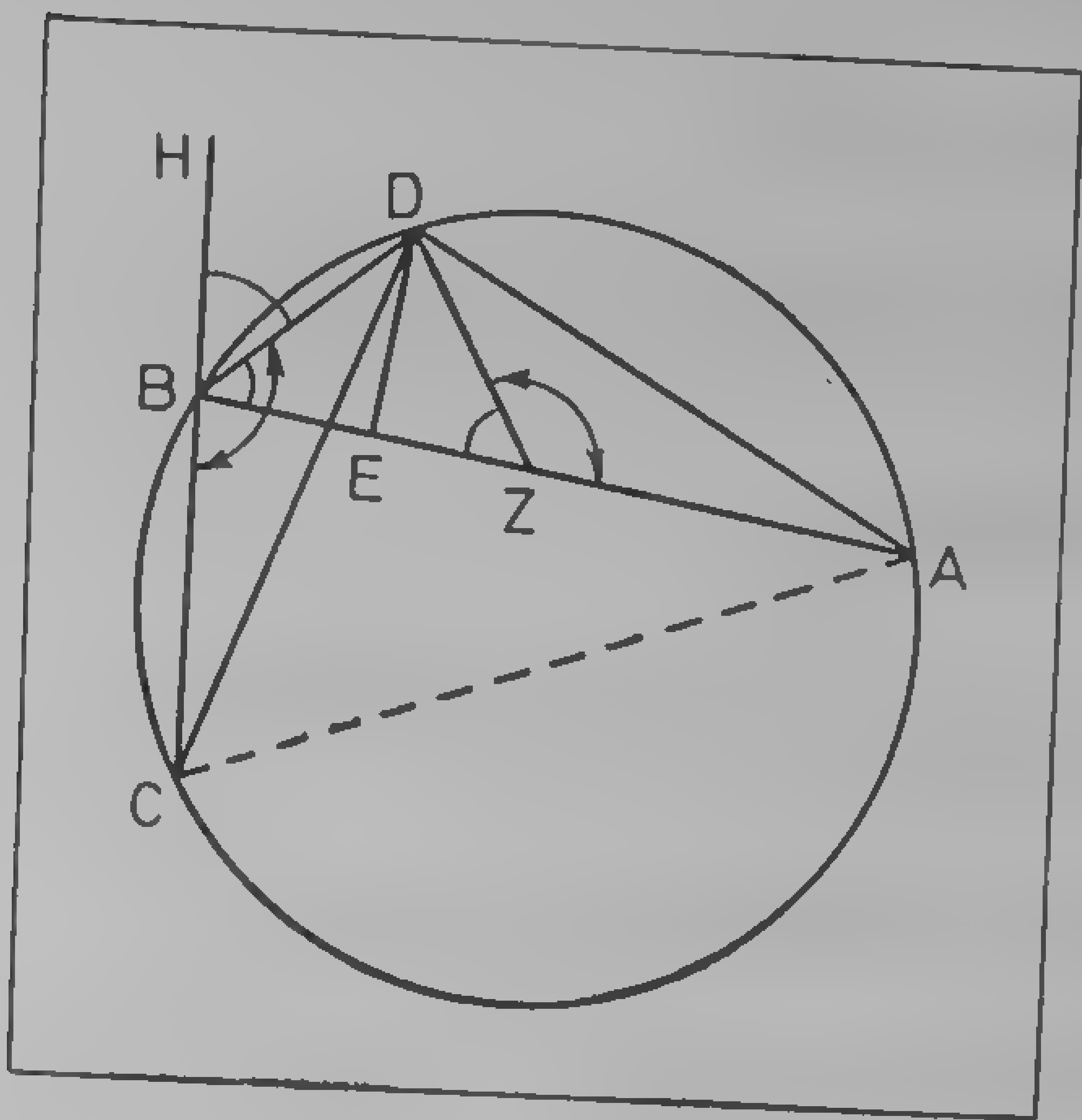
یادداشتهای مربوط به برهان بیستم قضیهٔ اول :

(۱)ـ عل : ص ۱۲ ـ سوتر A : ص ۲۴ وص ۶۸ ـ چد : ص۲۱ سطردوم به بعد «وقلت فی‌کتابی ...» ـ چم : ص ۵۶ سطرششم به‌بعد.

(۲)ـ دربارهٔ کتاب «فی‌المسائل‌المفیده ...» رجوع کنید به «بیرونی نامه» ص ۷۱ شمارهٔ ۲/۴۹

برهان بیست‌ویکم قضیهٔاول ـ (۱) چهارمین برهان ازاستاد.

(درنسخهٔ «عل» این برهان با عنوان «برهان رابع‌لی‌استعملته فـی علل زیج حبش(۲)» ثبت‌شده‌است ، امادرنسخه‌های چاپی «استخراج‌الاوتار» دردنبال برهان‌های دیگروبدون عنوان‌آمده است.)



(شکل۲۹)

روی EA پاره‌خط EZ را مساوی با EB جدا کرده DZ و DB را رسم می کنیم. واضح است که DB = DZ سپس DA و DC را رسم کرده BC را از طرف B امتداد می‌دهیم تا نیمخط BH به دست آید. چون زاویهٔ محاطی DBC روبه‌روی کمان $\widehat{DAC}$ است اندازهٔ زاویه DBH مساوی با اندازهٔ نصف کمان $\widehat{DBC}$ است واین کمان مساوی است با کمان $\widehat{AD}$. و چون زاویهٔ محاطی DBA روبه‌روی کمان $\widehat{AD}$ است پس :

$$\widehat{DBA} = \widehat{DBH} = \widehat{DZE}$$

بنابراین $\widehat{DBC} = \widehat{DZA}$ (مکملهای دوزاویهٔ متساوی)

وازطرف دیگر $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ (محاطی‌ورو به‌روی‌یك کمان)

پس زوایای دومثلث ADZ و CDB نظیر به‌نظیر باهم مساوی‌اند و چون دراین دو مثلث DB = DZ پس دومثلث با هم مساویند و در نتیجه AZ = BC اما می‌دانیم که ZE = EB پس:

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

* * *

تبصره - استاد درذیل این برهان مطلب زیر را افزوده است[۳]:

ازاین رومعلوم می‌شود که: **اگروتری از دایره قاعدهٔ مشترك دومثلث (محاطی) باشد[۴] که یکی از آنها متساوی‌الساقین باشد و دیگری نباشد محیط مثلث اول بزرگتر ازمحیط مثلث دوم است[۵].**

زیرا اگروتر AC را رسم کنیم این وتر را می‌توان قاعدهٔ مشترك دومثلث ADC و ABC دانست که اولی متساوی‌الساقین است و دومی متساوی‌الساقین نیست.

اما $AD > AE$ (مایل و عمود)

و $DC(=AD) > BE + BC$ (زیرا $EB + BC = AE$)

ازجمع دونامساوی فوق عضو به عضو حاصل می‌شود:

$$AD + DC > AE + BE + BC$$

واگر به دوطرف نامساوی فوق AC رابیفزاییم معلوم می‌شود که:

محیط مثلث ABC > محیط مثلث ADC

یادداشتهای مربوط به برهان بیست و یکم قضیهٔ اول :

(۱)- عل: ص ۱۲ و۱۳ - سوتر A : ص ۲۵ - چد : ص ۱۵ : «وقلت فی تعلیلی لزیج حبش ...» - چم : ص ۴۷.

(۲)- عنوان این کتاب این است: «تکمیل زیج حبش بالعلل وتهذیب اعماله من الزلل» رجوع کنید به «بیرونی نامه» ص۷۲ شمارهٔ ۲/۵۲.

(۳)- «عل» ص ۱۳ : «وقدیبین من هذا انه اذا کان...»- این مطلب درنسخه‌های چاپی استخراج الاوتار نیست.

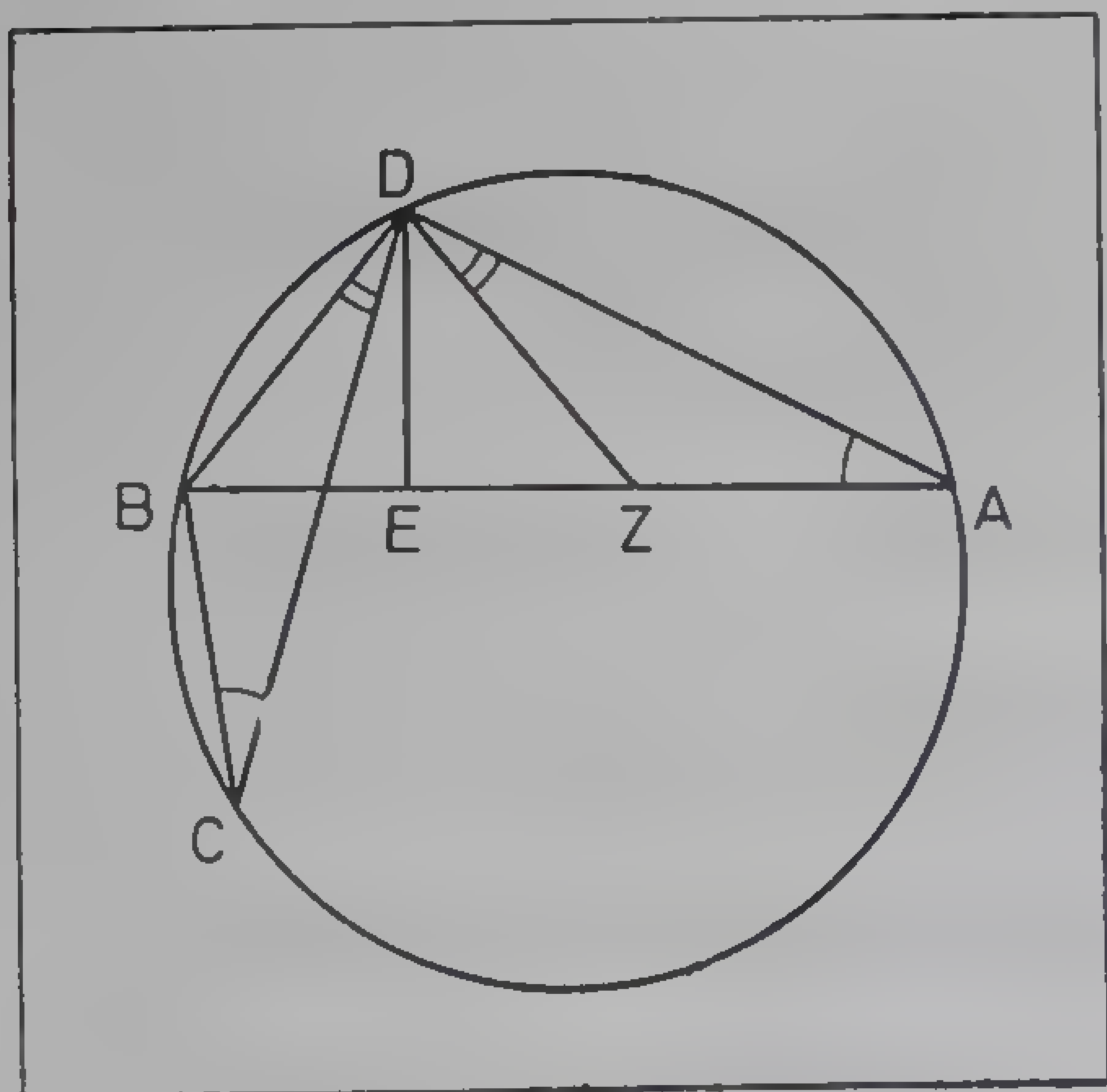
(۴)- دومثلث محاطی مذکورباید دریك طرف قاعدهٔ مشترك باشند.

(۵)- این قضیه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد : ازهمهٔ مثلثهایی که دریك قطعه‌دایره محاط شوند، و وترآن قطعه ضلع مشترك آنها باشد، آنکه متساوی‌الساقین است محیطش ازهمه بزرگتراست.

برهان بیست ودوم قضیهٔ اول(۱) - پنجمین برهان از استاد.

(این برهــان درنسخهٔ «عل» نیامده است. اما در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» برهانی برای تساوی دوپاره‌خط AZ و BC ذکر شده که استادآن را از کتاب خودموسوم به«تحصیل الراحة بتصحیح المساحة(۲)» نقل کرده است که می‌توان آن را به صـورت زیر کامل کــرد و برهان دیگری برای اثبات قضیهٔ اول دانست) .

نقطهٔ D را به‌نقاط A وB وC وصل کرده نقطهٔ Z را روی وتر AB طوری اختیـار می کنیم که زاویهٔ ADZ مساوی با زاویهٔ BDC باشـد[۳]. چون زوایای A و C متساویند. (محاطی ورو به‌روی یك کمان هستند) و AD = DC دو



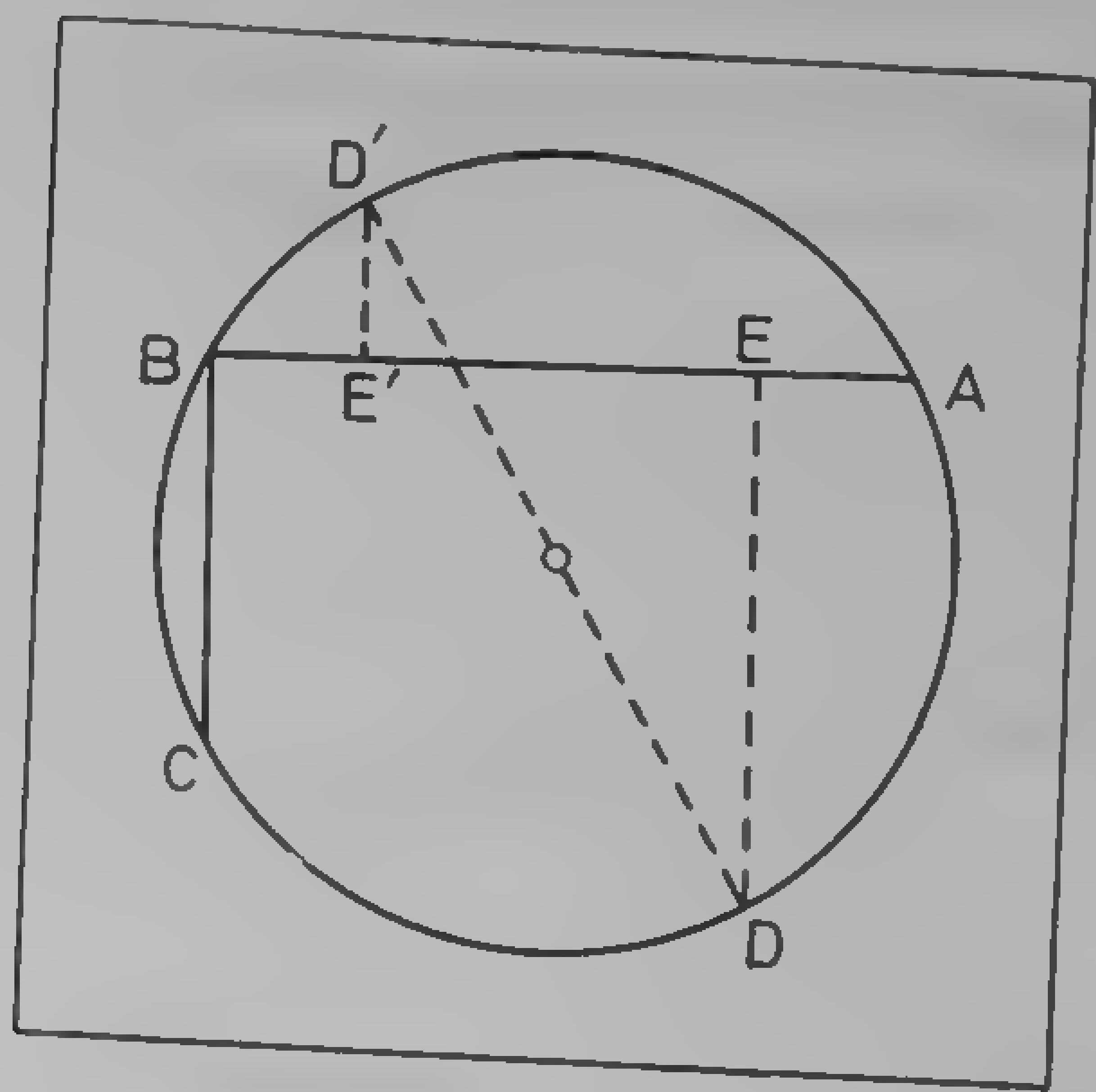
(شکل ۳۰)

مثلث ADZ و CDB (درحالت دوزاویه‌وضلع بین آنها) باهم‌مساوی هستند و در نتیجه AZ = BC و DZ = BD . پس‌مثلث DBZ متساوی‌الساقین است و بنابر-این ارتفاع DE قاعدهٔ BZ آن را نصف می کند یعنی ZE = EB

بنابراین $AZ + ZE = EB + BC$

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم:

تبصـره - استاد این برهان را ابتدا برای حالتی‌ذکر کرده است که کمان $\widehat{ABC}$ وخط شکستهٔ ABC دریك‌طرف خط راست AC واقع‌باشند[۴] (مانندشکل ۳۰). سپس‌افزوده است که اگر کمان $\widehat{AC}$ و خط شکسته ABC در دوطرف خط راست AC باشند[۵] (مانند شکل۳۱) یعنی‌اگر به جای‌آنکه وسط کمان $\widehat{ABC}$



(شکل۳۱)

را بگیریم ، وسط کمان $\widehat{AC}$ را که بقیهٔ دایره است اختیار کنیم و آن را نقطهٔ D بنامیم و از D عمود DE را بر AB فرودآوریم دیگر نقطهٔ E وسط خط شکستهٔ ABC نخواهد بود. بلکه دراین صورت باید انتهای دیگر قطر مار بر D یعنی نقطهٔ D′ را اختیار کنیم تاقضیه صحت داشته باشد. یعنی داشته باشیم :

$$AE' = E'B + BC$$

یادداشتهای مربوط به برهان بیست ودوم قضیهٔ اول :

(۱)- چد : ص ۱۴ - چم : ص ۴۷

(۲)- رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه» ص ۷۰ شمارهٔ ۲/۴۲

(۳)- چنانکه درتبصرهٔ صفحهٔ۶۶کتاب حاضرذکرکردم زاویهٔ DBC همیشه منفرجه است. بنابر این زاویهٔ BDC حاده می‌باشد و وقتی زاویهٔ ADZ رامساوی بازاویهٔ BDC اختیارمی‌کنیم نقطهٔ Z بین نقاط A و E قرارمی‌گیرد. (رجوع کنیدبه‌شکل۳۰)

(۴)- وفی کتاب تحصیل الراحة بتصحیح المساحة، احتجت الابانة علی- اتفاق الحال فی انطباق اخمص القوس علی حدبة الخط المنحنی دون تقابلهما، اعنی بالحالة انتصاف الخط مع انتصاف القوس.

(۵)- فان قوبل بین اخمصی قوس ادب والخط المنحنی(= المنکسر) اعنی الکاین فی کمال هذه القوس الی تمام الدایرة، لم ینصف عمود ده ذلك الخط

المنحنی، وانماینصفه عمود قوسه‌اعنی‌الخارج من طرف‌القطر الی طرفه‌الاخر نقطة د .

ج - عنوان قضیهٔ دوم

مقدمه - استاد در پایان برهانهایی که برای قضیهٔ اول ذکر کـرده نوشته است(۱) :

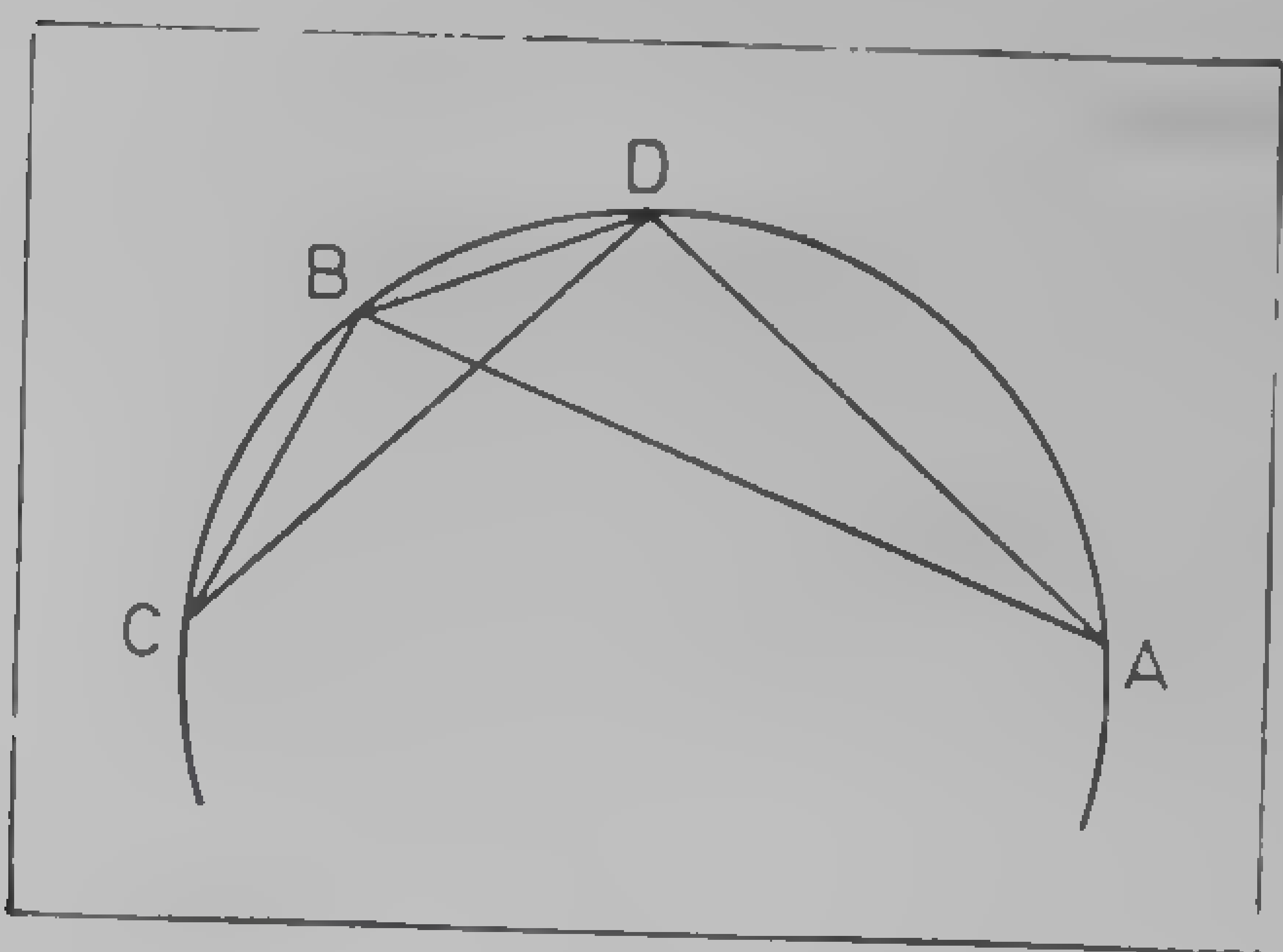
این‌بود آنچه‌ازروشهای دانشمندان در بارهٔ برهـان‌آوردن براین قضیه می‌دانستم. اما یونانیان را قضیهٔ‌دومی نیزهست که مبرزان دراین صناعت (= هندسه) برهانهایی برای درستی آن‌آورده‌اند. دربعضی ازاین برهانها ناچار باید ازقضیهٔ‌اول یعنی ازخاصیت خط منکسرمحاط دردایره استفـاده کـرد. دراین‌صورت قضیهٔ‌اول مقدمه‌ای برای قضیهٔ‌دوم خواهدبود. اما دربرخی‌دیگر ازاین برهانها احتیاجی به استفاده ازقضیهٔ‌اول نیست ، بلکه برعکس می‌توان قضیهٔ‌اول را با استفاده ازآنها به ثبوت رسانید. دراین‌حالت قضیهٔ‌دوم را می‌توان مقدمه‌ای برای‌قضیهٔ‌اول دانست.

اینك بابرشمردن برهانهایی که برای این قضیه‌آورده‌اند به این‌مطلب توجه کرده درهرمورد بین‌قضیهٔ مقدم و قضیهٔ تابع آن تمیزقائل خواهم‌شد.

سپس‌استاد قضیهٔ‌دوم‌را باعبارتی بیان کرده‌است که‌می‌توان‌آن‌را بااصطلاحات کنونی به صورت سادهٔ زیردرآورد(۲) .

عنوان قضیهٔ دوم ـ اگر کمانی مانند $\widehat{AC}$ از دایره‌ای را در نظر گرفته وسط آن را نقطهٔ D بنامیم ولقطهٔ دلخواه دیگری مانند B راروی همان کمان اختیار کنیم رابطهٔ زیر بین وترهای AD و AB و BD و BC برقرارخواهد بود :

$$\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2 \qquad (1)$$



(شکل۳۲)

فرض: اولاً $\widehat{AC}$ کمانی است ازدایره.
ثانیاً نقاط B و D روی کمان $\widehat{AC}$ واقعند.
ثانیاً $\widehat{AD} = \widehat{DC}$

حکم قضیهٔ دوم یعنی رابطهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد :

مربع هریك ازدووتر AD و CD که نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ را به دوسر آن وصل می‌کنند مساوی است با حاصلضرب فواصل نقطهٔ دلخواه B متعلق به کمان $\widehat{AC}$ ازدوسر همان کمان به علاوهٔ مربع AD.

***

استاد همین قضیه را با استفاده ازاصطلاح «جیب[۳]» بـه وجهی دیگر نیـز عنوان کرده است[۴] :

اگر نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ ازیك دایره و نقطهٔ B متعلق به همان کمان باشد داریم :

$$\text{جیب}\,\widehat{AB} \times \text{جیب}\,\widehat{BC} + (\text{جیب}\,\widehat{BD})^2 = (\text{جیب}\,\widehat{AD})^2$$

واین معادل است با اتحاد مثلثاتی زیر: (اگر α و β دو کمان متوالی از یك دایره باشند آنگاه داریم):

$$\sin\alpha.\sin\beta + \sin^{۲}\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right) = \sin^{۲}\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$$

●●●

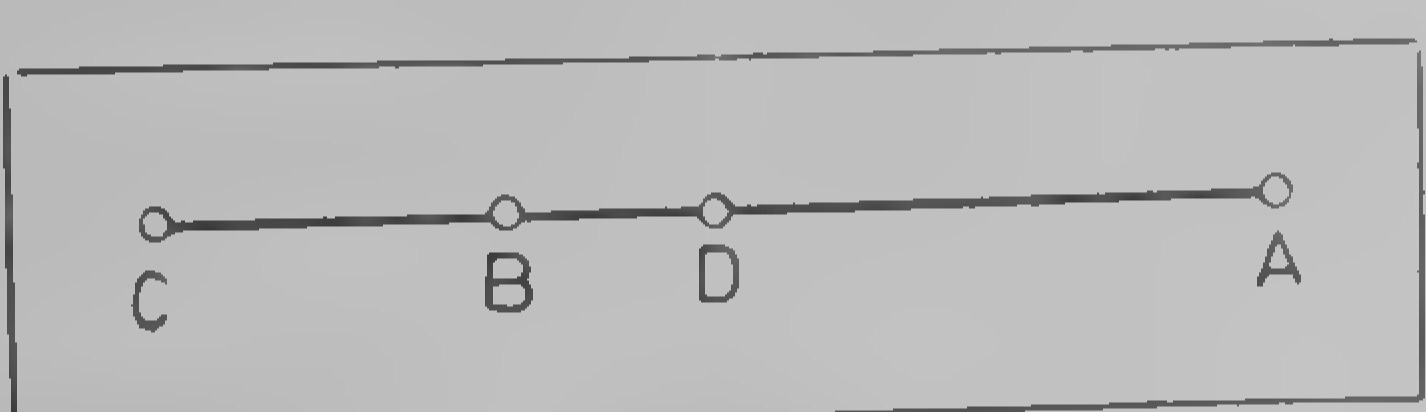
استاد در پایان عنوان قضیهٔ دوم افزوده‌است[۵]

وهریك ازدانشمندان مذکور (= مبرزان‌درعلم هندسه) درکاستن‌ازدشواری اثبات این‌قضیه و کوتاه کردن آن کوشیده است و این برهان به صورتهای مختلف درآمده[۶].

●●●

تبصره - اگر نقاط A و D و B و C بریك خط راست واقع باشند باز حکم فوق بنابرقضیهٔ پنجم ازمقالهٔ دوم اصول اقلیدس[۷] صحیح‌است. این قضیه را می‌توان با اصطلاحات کنونی‌چنین بیان کرد:

> اگرپاره خطی مانند AC را درنظرگرفته وسط‌آن رانقطهٔ D بنامیم وروی AC نقطهٔ دلخواه B را اختیارکنیم رابطهٔ زیربرقرار خواهدبود:
>
> $$\overline{AD}^{۲} = \overline{CD}^{۲} = AB.BC + \overline{BD}^{۲}$$



(شکل ۳۳)

یادداشتهای مربوط به عنوان قضیهٔ دوم :

(۱)- عل: ص ۱۳- (این عبارات به این صورت درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» نیامده است) :

«فهذا ما کان اجتمع عندی من طرق الفضلاء فی اقامة البرهان علی صحة هذه الدعوی - ولليونانيين دعوی أخری قد اقاد هولاء المبرزون فی الصناعة براهین علی صحتها. منها ما اضطر الی تقدیم خاصیة الخط المنحنی فی القوس فصار لذلك من توابعها. ومنها ما استغنی عن تقدیم تلك الخاصیة. فلما انعکست وافکن فیها تصحیح تلك الدعوی الاولی صارت لذلك من مقدماتها. واذا انتهینا الی ذلك عند تعدید مالهم من البراهین أتینا عنها وميزنا بين المقدمة والتابعة»

درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد: ص۲۵ - چم: ص ۶۰) به جای عبارات فوق نوشته شده‌است:

«ولانا اذا عبرنا عن هذا الخط المنحنی مما يحدث منه فی القوس. فقلنا اذا قسم قوس... کانت خاصية حسنة نافعة - وصار کل واحد مما تقدم فی الدعوی الاولی وهی مقدمة للاخری، وربما اسبقت کل واحدة عن صاحبتها.

(۲)- عل: ص۱۳ :

«وهذه هی الدعوی الاخری . اذا انحنی قوس من دايرة خط فقسم القوس بنصفين و انحنافی تلك القوس ايضا خط آخر فقسمها بقسمين مختلفين فان ضرب احد قسمی الخط المنصف للقوس فی الاخر یساوی ضرب احد قسمی الخط القاسم للقوس بقسمين مختلفين فی الاخر مع مربع وترما بين نقطی انقسام القوس بهما.»

درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد: ص ۲۵ - چم: ص۶۰) این قضیه چنین ذکرشده است :

«اذا قسم قوس بنصفين وبقسمين مختلفين فان مضروب وتری القسمين المختلفين احدهما فی آلاخر مع مربع وترما بین النصف و بین احد المختلفين مساولمربع وترنصف القوس»

(خلاصهٔ هردو صورت فوق همان است که به عنوان قضیهٔ دوم در متن نوشته‌ام) .

(۳)- دربارهٔ اصطلاح جیب وانواع آن رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحات ۱۰۶ تا ۱۰۹

(۴)- چد : ص ۲۵ - چم ص ۶۰ (این قسمت در نسخهٔ «عل» نیست) :

«اوعبرناعنهـا بالجیوب التی هی انصاف اوتار اضغاف القسی وقلنـاان ضرب جیب ...»

(۵)- «عل» ص ۱۳ سطرششم وهفتم ازآخر: «وکل واحد من هؤلاء قدخفف ثقل هذه المؤامرة وقصرطولها فخرجت علی هیآت مختلفه ...»

درنسخه‌های چاپی استخراج الاوتار (چد: ص ۲۷ - چم:ص۶۳) به جای عبارت فوق چنین آمده است:«ومن الفضلاء من خفف ثقل هذه المؤامرة، ومنهم من طول قصرها فخرجت علی هیآت مختلفة ...»

(۶)- مثلاً دربرهان اول قضیهٔ دوم ابتدا قضیهٔ دیگری ثابت شده‌و سپس قضیهٔ دوم ازآن نتیجه گرفته شده‌است .

(۷)- رجوع کنید به «هیث E» ج ۱ ص ۳۸۲ به بعد (درآنجابحث جالبی دربارهٔ این قضیه ونتایج آن خواهید یافت) ونیز رجوع کنید به «تحریراقلیدس» ص ۳۸

د - برهانهای قضیهٔ دوم

(آنچه در تبصرهٔ پایان برهانهای قضیهٔ اول « صفحهٔ ۱۰۸ » نوشته‌ام دربارهٔ برهانهای قضیهٔ دوم نیز صادق است).

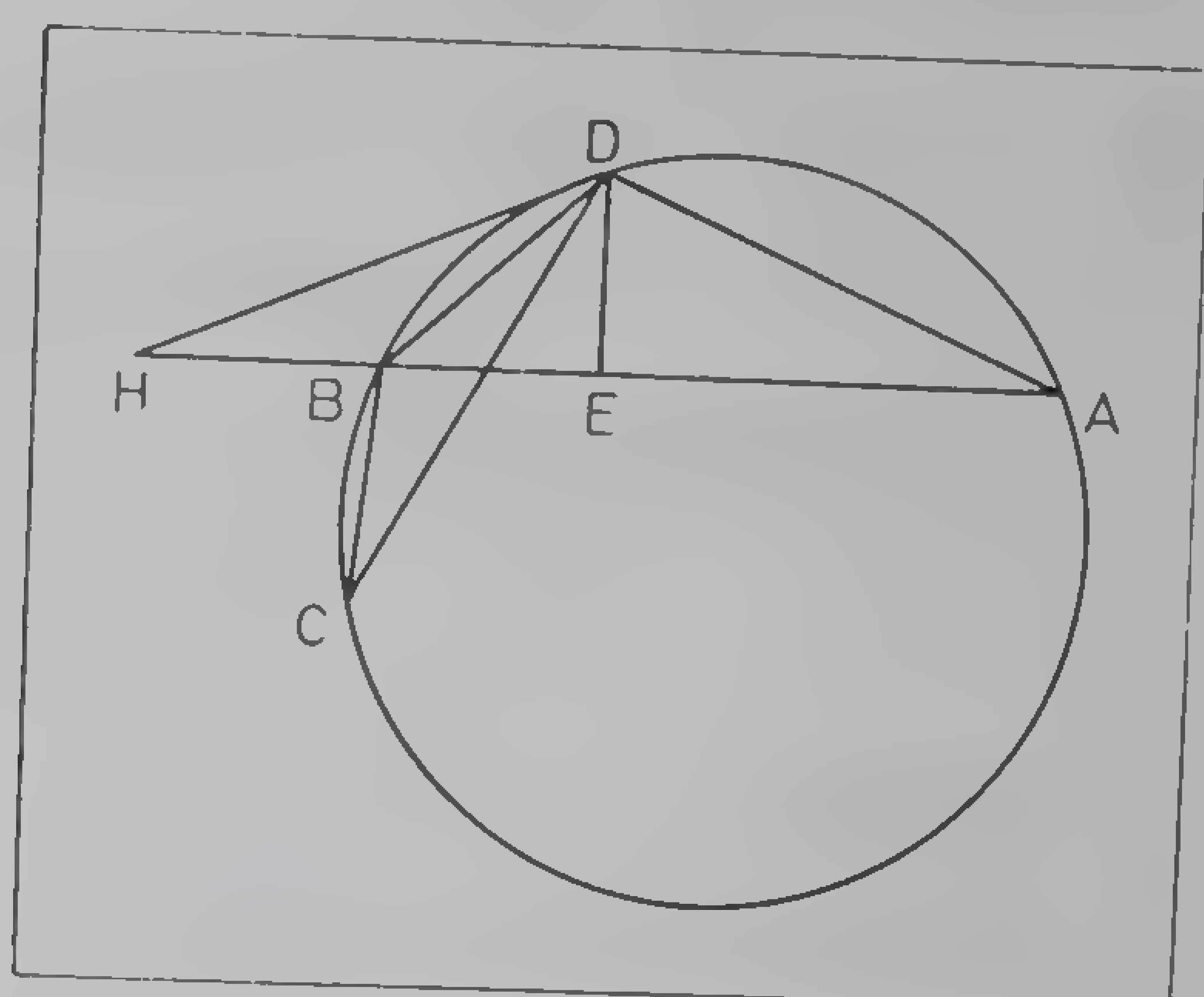
برهان اول قضیهٔ دوم(۱) - ازیکی ازیونانیان و ابوسعید سجزی(۲) و ابوعلی بصری(۳) (= ابن هیثم) .

استاد درآغاز این برهان متذکر شده است که آن را درمسائلی(۴) که یوحنا

بن یوسف(۵) ازیونانی به عربی ترجمه کرده‌است یافته و خاطرنشان کرده است که ابوسعید سجزی و ابو علی بصری این قضیه را بر حسب اتفـاق همین گـونه ثابت کرده‌اند(۶).

(ابتدا ملاحظه می کنیم که :

هرگاه نقطهٔ دلخواهی روی قاعدهٔ یك مثلث متساوی‌الساقین اختیار کنیم که آن را به دوقسمت نامتساوی تقسیم کنـد وآن نقطه را به رأس مثلث وصل کنیـم حاصل ضرب دوقطعهٔ قاعده به علاوهٔ مربع پاره‌خطی که نقطهٔ تقسیم را به رأس‌مثلث وصل‌می کند مساوی است با مربع ساق مثلث . (۷)



(شکل۳۴)

برهان قضیهٔ فوق ـ روی قاعدهٔ AH از مثلث متسـاوی‌الساقین DAH (DA = DH) نقطهٔ دلخواه B را قسمی اختیار می کنیم که DB بـر AH عمود نباشد و D را به B وصل می کنیم.

باید ثابت کنیم که :

$$AB \times BH + \overline{BD}^{2} = \overline{AD}^{2}$$

دایرهٔ‌محیطی مثلث ADB را رسم کرده (۸) عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم. چون E وسط AH است و نقطهٔ B پاره‌خط AH را به‌دوقسمت‌نامتساوی تقسیم کرده است (نظر به قضیهٔ‌پنجم ازمقالهٔ دوم اصول اقلیدس (۹)) داریم :

$$\overline{AE}^{2} = AB \times BH + \overline{EB}^{2}$$

اگر به دوطرف تساوی فوق $\overline{DE}^{2}$ رابیفزاییم حاصل می‌شود:

$$AE^{2} + \overline{DE}^{2} = AB \times BH + \overline{EB}^{2} + DE^{2} \qquad (۱)$$

اما $\overline{AE}^{2} + \overline{DE}^{2} = \overline{AD}^{2}$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ AED) و $\overline{EB}^{2} + \overline{DE}^{2} = BD^{2}$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ BED) بنابراین تساوی (۱) به صورت زیردرمی آید :

$$\overline{AD}^{2} = AB \times BH + \overline{BD}^{2} \qquad (۲)$$

(پس‌ازبیان‌این مقدمه می گوییم :)

درضمن برهانهای‌قضیهٔ‌اول ثابت‌شد که‌اگر کمان $\widehat{DBC}$ مساوی با کمان $\widehat{AD}$ باشد و BC و DC را رسم کنیم خواهیم داشت $BH = BC$ بنابراین تساوی (۲) به صورت‌زیردرمی آید :

$$\overline{AD}^{2} = AB \times BC + BD^{2}$$

واین‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

●●●

استاد در پایان این برهان نوشته‌است[۱۰] که قضیهٔ دوم در این مورد از **لواحق** محسوب می‌شود[۱۱]. (زیرا در برهان آن از قضیهٔ اول استفاده شده‌است). و افزوده‌است: اما ابوسعید سجزی و ابوعلی بصری (= ابن هیثم) ابتدا خط شکستهٔ ABC را در کمان $\widehat{ADBC}$ از دایره محاط کرده و ثابت کرده‌اند که در این صورت

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$$

و برای اثبات این رابطه BH را روی امتداد AB مساوی با BC جدا کرده (و با استفاده از قضیهٔ اول ثابت کرده‌اند که مثلث ADH متساوی‌الساقین است[۱۲]) و برهان را مانند فوق کامل کرده‌اند.

یادداشتهای مربوط به برهان اول قضیهٔ دوم :

(۱)- عل: ص ۱۳- سوتر A: ص ۲۶ - چد: ص ۲۷ و ۲۸- چم: ص ۶۳ و ۶۴

(۲)- دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان هفتم قضیهٔ اول - و نیز رجوع کنید به برهانهای هفتم و هشتم و نهم قضیهٔ اول و برهان چهارم قضیهٔ دوم

(۳)- در بارهٔ ابوعلی بصری رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۲) ذیل برهان هفدهم قضیهٔ اول.

(۴)- شاید کتابی دربارهٔ مسائل هندسه بوده‌است.

(۵)- دربارهٔ یوحنابن یوسف رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۵) ذیل برهان پنجم قضیهٔ اول .

(۶)- «عل» ص ۱۳: «برهان علیها وجدته فی المسائل التی ترجمها یوحنابن یوسف من الیونانی الی العربی و اتفق بعینه لابی سعیدالسجزی و ابی علی البصری بطریقة واحدة» .

(۷)- این قضیه در متن عربی چنین عنوان شده است: «کل مثلث

متساوی الساقین یخـرج فیه خط من‌الزاویة الی القاعـده فیقسمها بقسمین مختلفین‌فان ضرب‌احد القسمین‌المختلفین فی‌الاخر ومربع ذلک‌الخـط مساو لمربع‌احدالساقین («عل» : ص ۱۳ و۱۴)

(۸)- این دایره درقسمت دوم برهان به‌کارخواهدآمد.

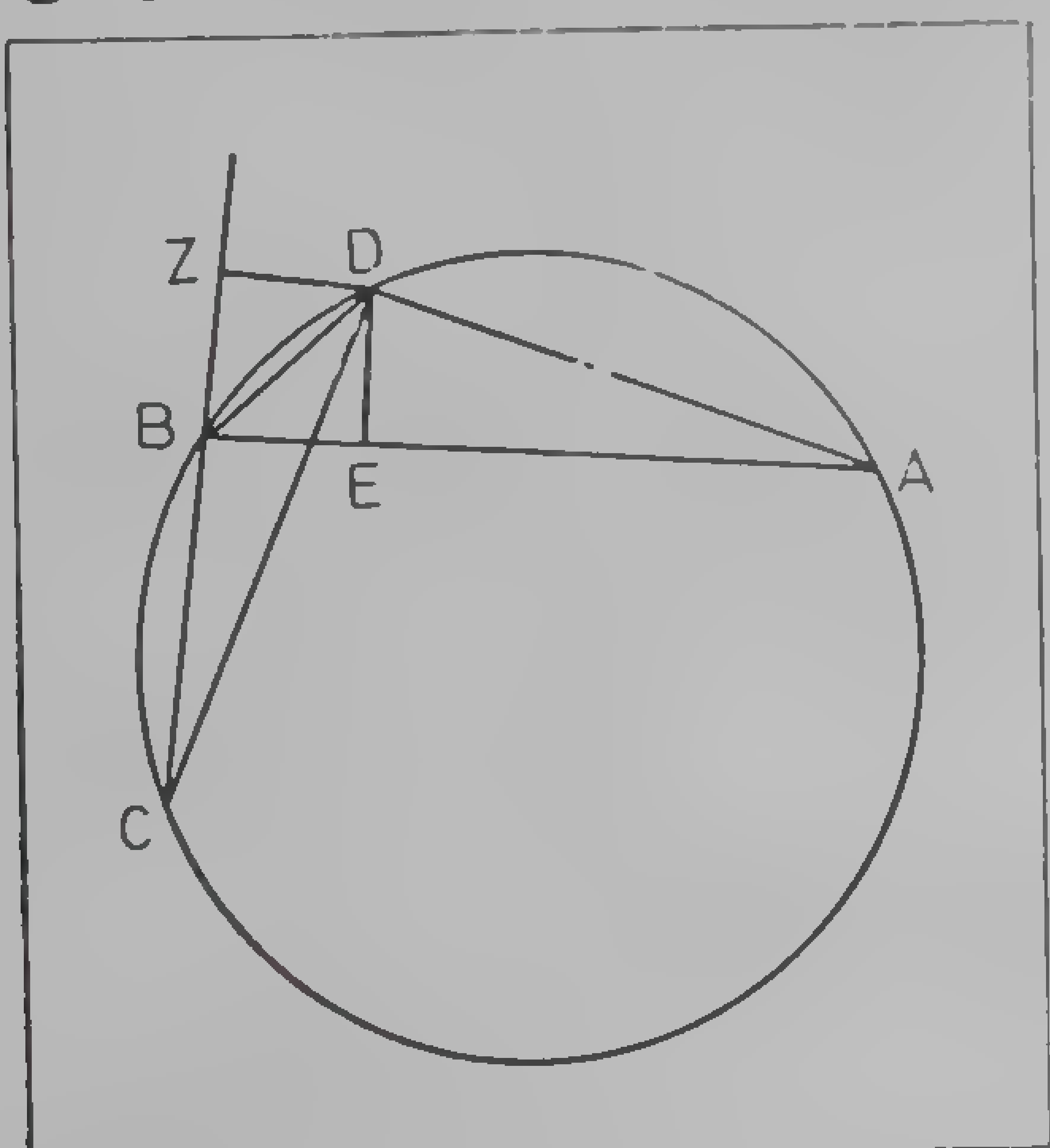
(۹)- دربارهٔ این قضیه رجوع‌کنید به تبصرهٔ ذیل «عنوان قضیـهٔ دوم» (ص ۱۱۲)

(۱۰)- «عل» ص۱۴: «ولذلک صارهذا من‌اللواحق، واما ابوسعید ـ السجزی و ابوعلی‌البصری فجعلا...»

(۱۱)- یادآوری می‌کنم‌که استاد ازقضایای اول ودوم هرکدام‌راکه ثابت شده فرض شود ودربرهان قضیهٔ دیگر ازآن استفاده شود «مقدمه» یا «سابق» نامیده وآن راکه بااستفاده‌ازقضیهٔ دیگرثابت شود «تابع» یا «لاحق» خوانده است .

(۱۲)- آنچه دربین دو پرانتز نوشته‌ام در متن عربی نیامده و آن را به عنوان توضیح افزوده‌ام .

برهان‌دوم قضیهٔ‌دوم(۱) ـ نخستین برهان(۲) از ابونصر منصوربن علی بن عراق(۳) .



(شکل ۳۵)

می‌خواهیم‌ثابت کنیم که:

$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$

CB را ازطرف B امتداد داده از نقطهٔ D عمود DZ را بر آن فرود می‌آوریم.

همچنین از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرودآورده پاره‌ خطهای DB و AD و DC

را رسم می کنیم. چون زاویهٔ ABC محاطی است و اندازهٔ آن مساوی است با نصف همهٔ دایره منهای کمان $\widehat{ADBC}$ پس اندازهٔ زاویهٔ ABZ (که مکمل زاویهٔ ABC است) مساوی‌است با نصف اندازهٔ کمان $\widehat{ADBC}$ و چون کمان $\widehat{AD}$ نصف کمان $\widehat{ADBC}$ است پس خط BD زاویهٔ ABZ را نصف می کند و داریم :

$$E\hat{B}D (= A\hat{B}D) = D\hat{B}Z$$

بنابراین دومثلث قائم‌الزاویهٔ DEB و DZB (درحالت وتر و یك زاویهٔ حاده) متساویند. پس :

$$BE = BZ \qquad (۱)$$

(ازاین‌تساوی‌بعداً استفاده خواهد شد)

حال گوییم که درمثلث قائم‌الزاویهٔ DZC داریم :

$$\overline{DC}^{۲} = \overline{CZ}^{۲} + \overline{DZ}^{۲} \qquad (۲)$$

ودرمثلث‌قائم‌الزاویهٔ DBZ داریم :

$$\overline{DZ}^{۲} = \overline{BD}^{۲} - \overline{BZ}^{۲} \qquad (۳)$$

ازتساویهای (۲) و (۳) معلوم‌میشود که :

$$\overline{DC}^{۲} = \overline{BD}^{۲} + \overline{CZ}^{۲} - \overline{BZ}^{۲} \qquad (۴)$$

اکنون برای محاسبهٔ $\overline{CZ}^{۲} - \overline{BZ}^{۲}$ ملاحظه می کنیم که :

$$CZ = CB + BZ$$

وچون دوطرف این تساوی را مربع کنیم حاصل می‌شود :

$$\overline{CZ}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{BZ}^2 + 2CB \times BZ$$

واز آنجا :

$$\overline{CZ}^2 - \overline{BZ}^2 = \overline{CB}^2 + 2CB \times BZ$$

و یا

$$\overline{CZ}^2 - \overline{BZ}^2 = CB(CB + 2BZ) \quad (5)$$

امادر قضیهٔ اول ثابت کردیم که $AE = EB + BC$. ازروی این تساوی بادر نظر گرفتن رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود :

$$AB = BC + 2BZ$$

وچون این مقدار را در رابطهٔ (۵) قرار دهیم نتیجه می‌شود :

$$\overline{CZ}^2 - \overline{BZ}^2 = BC \times AB$$

وبنابراین تساوی (۴) به صورت زیردرمی آید :

$$\overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + BC \times AB$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره ــ استاد درپایان این برهان افزوده‌است[۴] که :

جون دراین برهان تساوی $AE = EB + BC$ یعنی حکم قضیهٔ اول را بدون برهان پذیرفتیم پس دراینجا قضیهٔ‌دوم از «لواحق» است.(زیرا ازروی قضیهٔ اول ثابت شده‌است)

یادداشتهای مربوط به برهان دوم قضیهٔ دوم :

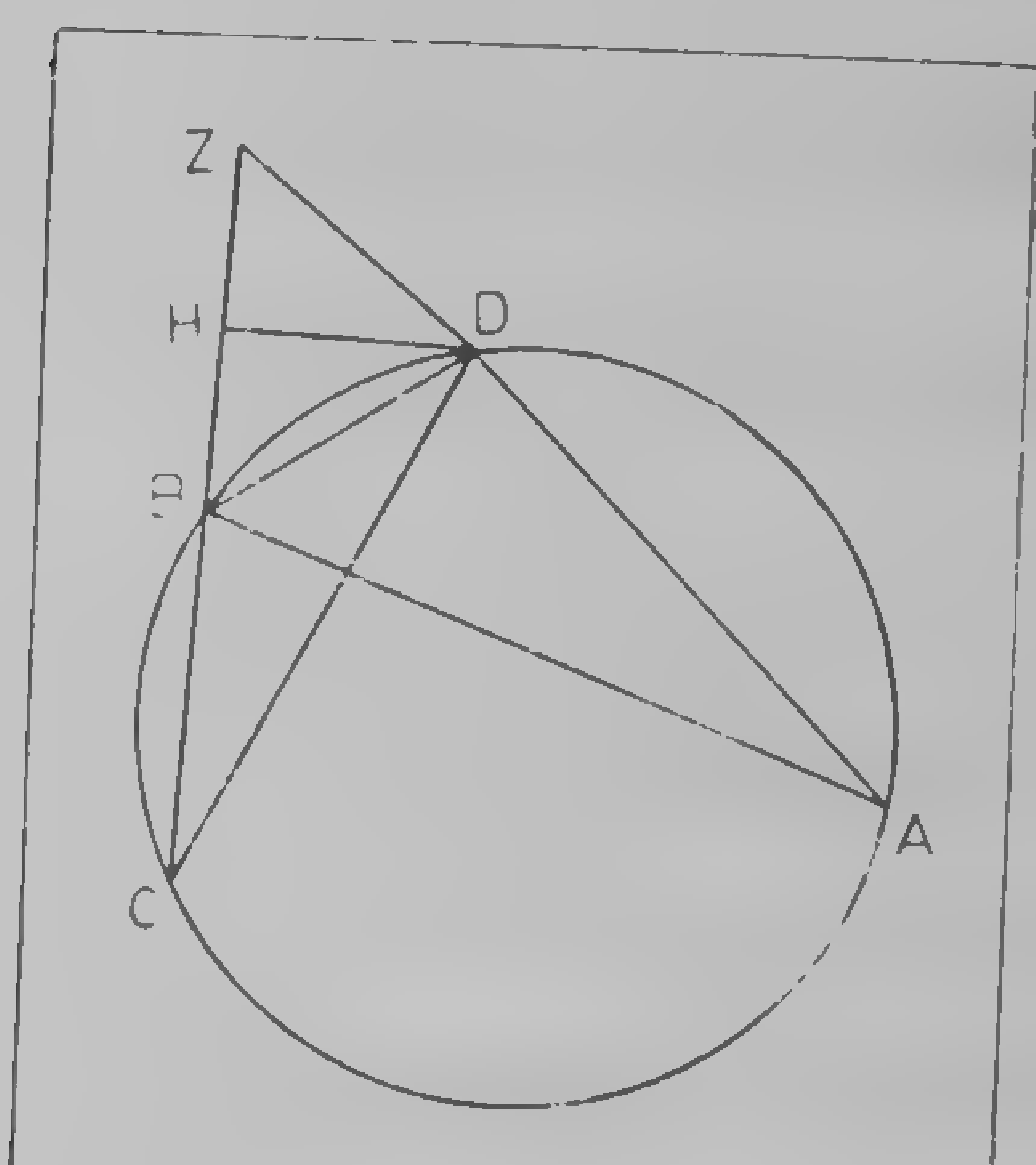
(۱)- عل: ص ۱۴ و ۱۵ - سوتر A : ص ۲۷ و ۲۸ - چد: ص ۳۰ - چم: ص ۶۶ .

(۲)- یك برهان دیگر از ابونصر عراق برای این قضیه به عنوان برهان دوم قضیهٔ دوم خواهد آمد - ونیز رجوع کنید به برهانهای دوازدهم و شانزدهم قضیهٔ اول و برهان سوم قضیهٔ چهارم.

(۳)- دربارهٔ ابونصر عراق رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان دوازدهم قضیهٔ اول- این مطلب جالب توجه است که استاد این برهان را در نسخهٔ «عل» به نام ابونصر منصوربن عراق ثبت کرده ودرنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» آن را از «ابونصر جعدی» دانسته است. بنابراین تردیدی باقی نمی‌ماند که ابونصرعراق را گاهی نیز ابونصر جعدی می‌نامیده‌اند.

(۴)- عل: ص۱۴ و ۱۵ : وهذا من اللواحق لاخذ مساواة اه مجموع هب وبج من غیر برهان

برهان سوم قضیهٔ دوم(۱) - دومین برهان (۲) از ابونصر عراق (= ابو- نصر جعدی) (۳)



(شکل ۳۶)

پاره خط CB را ازطرف B امتداد داده عمود DH را بر آن فرود می‌آوریم و پاره خط HZ را روی امتداد BC مساوی با BH جدا و AD و DB و DC را رسم می‌کنیم. داریم:

$$\overline{DC}^2 = DH^2 + \overline{HC}^2$$

(از مثلث قائم‌الزاویه DHC)

و $\overline{DH}^{2} = \overline{DB}^{2} - \overline{BH}^{2}$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ DHB)

ازدو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$\overline{DC}^{2} = \overline{DB}^{2} - \overline{BH}^{2} + \overline{CH}^{2} = \overline{DB}^{2} - \overline{BH}^{2} + (BC + BH)^{2}$$

$$= \overline{DB}^{2} + \overline{BC}^{2} + 2BH \times BC$$

و یا

$$\overline{DC}^{2} = \overline{DB}^{2} + BC\,(BC + 2BH)$$

اما چون $HZ = BH$ پس $BC + 2BH = CZ$

ورابطهٔ (۱) به صورت زیردرمی‌آید:

$$(2) \qquad \overline{DC}^{2} = \overline{DB}^{2} + BC \times CZ$$

(اکنون ثابت‌می کنیم که دومثلث ABD و CDZ باهم‌مساوی‌اند).

واضح است که $\hat{A} = \hat{C}$. ازطرف دیگر چنانچه در برهـان اول قضیهٔ دوم ثابت شدخط BD زاویهٔ ABZ رانصف کرده ونیز $\hat{Z} = \hat{DBH}$ پس $\hat{ABD} = \hat{CZD}$ بنابراین زوایای دومثلث ABD و CDZ نظیر به نظیر باهم مساوی‌اند وچون در این دومثلث $AD = DC$ پس دومثلث باهم مساوی‌اند وداریم $AB = CZ$

وچون این مقدار CZ را در رابطهٔ (۲) قراردهیم حاصل می‌شود:

$$\overline{DC}^{2} = \overline{DB}^{2} + BC \times AB$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره - استاد درپایان این برهان افزوده است [۴] که :

«چون دراین برهان ازقضیهٔ اول استفاده نکرده‌ایم می‌توان آن را از«سوابق» دانست وقضیهٔ اول را ازروی آن ثابت کرد.»

یادداشتهای مربوط به برهان سوم قضیهٔ دوم :

(۱)- عل: ص ۱۵ - سوتر A : ص ۲۸ - چد: ص ۳۲ و۳۳ - چم: ص ۶۹

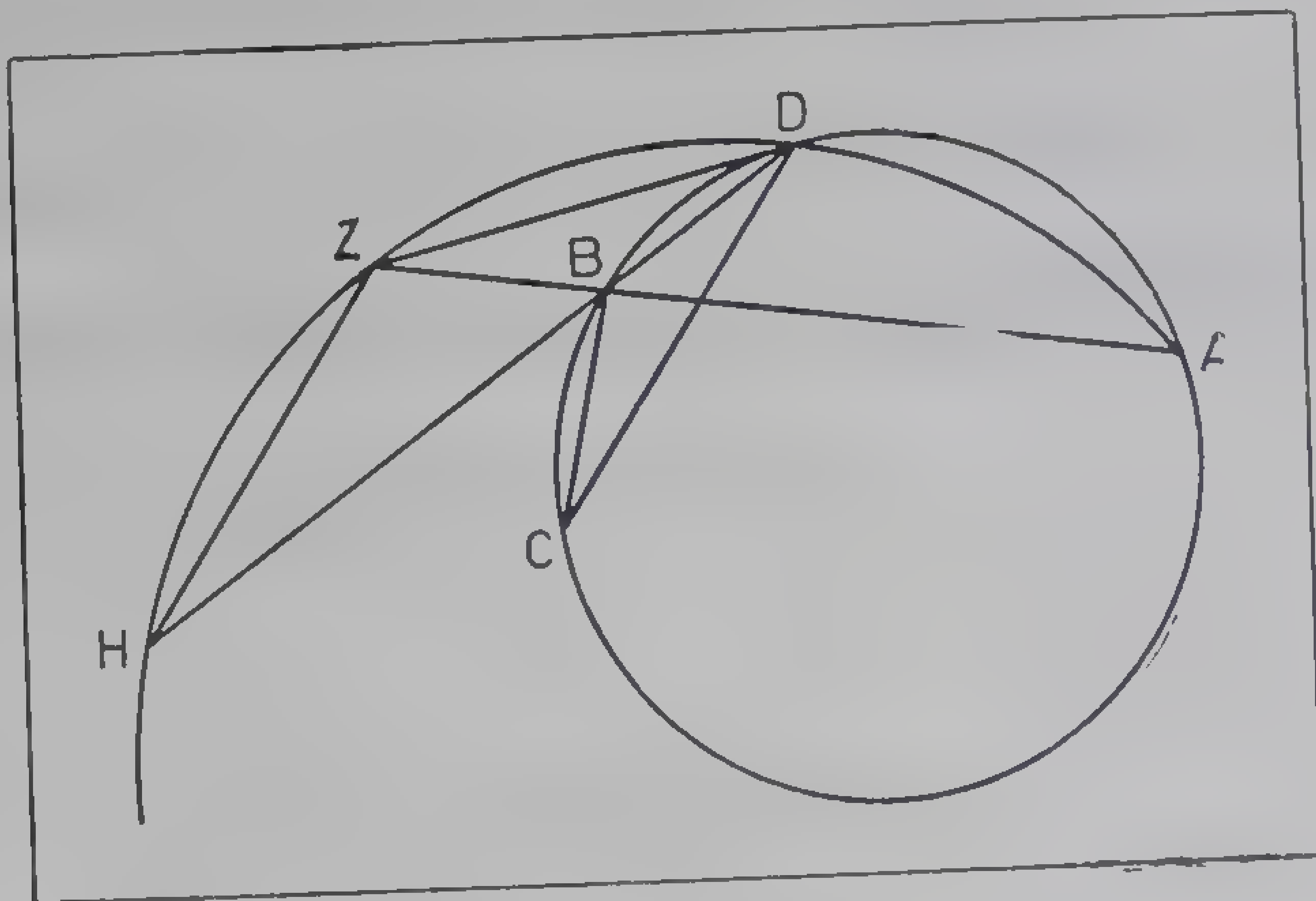
(۲)- یك برهان دیگرازابونصرعراق برای این قضیه به عنوان‌برهان دوم قضیهٔ دوم‌گذشت - ونیز رجوع کنید به برهانهای دوازدهم وشانزدهم قضیهٔ اول وبرهان سوم قضیهٔ چهارم.

(۳)- رجوع کنیدبه یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان دوازدهم قضیهٔ اول ویادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان دوم قضیهٔ دوم

(۴)- عـل: ص ۱۵: «وهذا من‌السوابق لاستغنائه عن خاصیة‌الخط المنحنی ...»

برهان چهارم قضیهٔ دوم [۱] - از ابوسعید سجزی [۲]

پاره خط AB را ازطرف B امتداد داده روی‌آن نقطهٔ Z راطوری اختیار می کنیم که‌مثلث ADZ متساوی‌الساقین باشد. (یعنی به‌مرکز D و به‌شعاع DA کمانی ازدایره‌رسم‌می کنیم‌تاامتداد AB رادر نقطهٔ Z قطع کند) ودایرهٔ‌محیطی‌مثلث ADZ



(شکل ۳۷)

را رسم می‌کنیم و DB را امتداد می‌دهیم تا این دایره را در نقطهٔ H قطع کند و ZH را رسم می کنیم. چون از نقطهٔ B دو قاطع در دایرهٔ بزرگتر رسم شده است (اگر قوت نقطهٔ B را نسبت به دایره بزرگتر بنویسیم) داریم :

$$AB \times BZ = BD \times BH \quad (۱)$$

ازطرف دیگر می‌توان نوشت :

$$BH + BD = DH$$

وچون دوطرف این تساوی را در BD ضرب کنیم حاصل می‌شود :

$$BD \times BH + \overline{BD}^{۲} = BD \times DH$$

ازمقایسهٔ این تساوی با تساوی (۱) حاصل می‌شود :

$$AB \times BZ + \overline{BD}^{۲} = BD \times DH \quad (۲)$$

حال گوییم در دومثلث DBZ و DZH دوزاویهٔ DHZ و DZB متساویند (زیرا هـردومحاطی و روبه‌روی دو کمان متساوی $\widehat{ZD}$ و $\widehat{AD}$ از دایرهٔ بزرگتر هستند) وزاویهٔ ZDB درآنها مشترك است پس این دومثلث متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{DH}{DZ} = \frac{DZ}{BD}$$

و ازآنجا :

$$BD \times DH = \overline{DZ}^2$$

چون این مقدار را درتساوی (۲) قراردهیم حاصل می‌شود :

$$AB \times BZ + \overline{BD}^2 = \overline{DZ}^2$$

اما ازقضیهٔاول نتیجه می‌شود $BZ = BC$ و می‌دانیم که $DZ = AD$ پس رابطهٔ فوق را می‌توان چنین نوشت :

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{DC}^2$$

واین‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره - استاد درپایان این برهان افزوده‌است[۳] :

«چون دراین برهان تساوی $BZ = BC$ را دانسته‌فرض کردیم (یعنی‌درواقع از قضیهٔاول استفاده کردیم) پس دراینجا قضیهٔدوم از «لواحق» است. اما اگرمانند قبل ابتدا قضیهٔدوم را (از راه دیگری) ثابت کنیم و سپس ازآن قضیهٔاول را نتیجه بگیریم دراین‌صورت قضیهٔدوم از «سوابق» خواهدشد[۴].

یادداشتهای مربوط به برهان چهارم قضیهٔ دوم :

(۱)- عل: ص ۱۵- سوتر A : ص ۲۸ و ۲۹ - چد: ص ۳۱-چم: ص ۶۷ و ۶۸

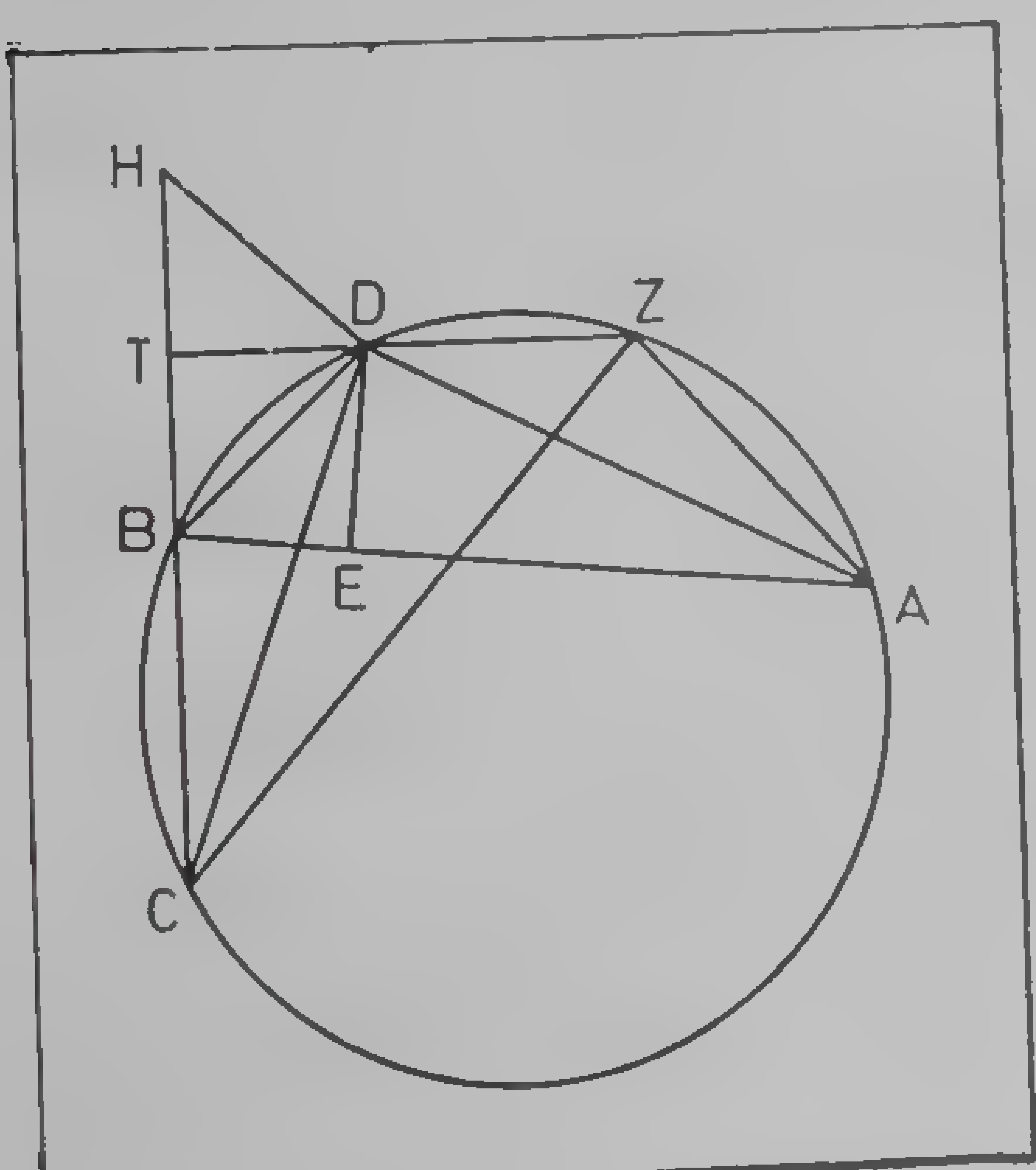
(۲)- دربارهٔ ابوسعید سجزی رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان هفتم قضیهٔ اول - ونیز رجوع کنید به برهانهای هفتم وهشتم و نهم قضیهٔ اول وبرهان اول قضیهٔ دوم.

(۳)- عل: ص ۱۵: «وهومن اللواحق مادام یوجدفیه مساواة بز ل بج مسلماً. فاما اذابرهن بمثل ماتقدم، ثم نسلق منه الی خاصیة الخط المنحنی کان حینئذ من السوابق.»

(۴)- رجوع کنید به تبصرهٔ ۲ ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم (صفحهٔ ۱۲۸). درآنجا چگونگی این امربیان شده است.

برهان پنجم قضیهٔ دوم(۱)- از ابوعبدالله الشنّی (۲).

از کمان $\widehat{AB}$ کمان $\widehat{AZ}$ را مساوی با کمان $\widehat{BC}$ جدا کرده وتر CZ رارسم می کنیم. (واضح است که چون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است $\widehat{BD}=\widehat{DZ}$) سپس CB را ازطرف B امتداد داده روی آن CH را مساوی با CZ جدا می کنیم. وپاره‌خطهای DC و DH و DA و DB و DZ را رسم می کنیم.



(شکل ۳۸)

چون در دومثلث DHC و DZC دوضلع CH و CZ متساوی وضلع DC مشترك است و دوزاویهٔ HCD و ZCD متساویند، زیرا محاطی وروبه‌روی دو کمان متساوی $\widehat{BD}$ و $\widehat{DZ}$ هستند دو مثلث مذکور متساویند و بنابراین $DH = DZ$ و چون $DZ = DB$ پس $DH = DB$ یعنی مثلث DHB متساوی‌الساقین است. پس اگر از نقطهٔ D عمود DT را بر BH فرودآوریم واضح‌است که نقطهٔ T وسط پاره‌خط BH است.

اکنون می‌گوییم که پاره‌خط BH درنقطهٔ T نصف شده ونقطهٔ C در امتداد آن قرار دارد. پس (بنا به قضیهٔ‌ششم مقالهٔ‌دوم «اصول اقلیدس»[۳]) داریم:

$$HC \times BC + \overline{BT}^2 = \overline{CT}^2 \qquad (۱)$$

و چون به دوطرف این تساوی مقدار TD^2 را بیفزائیم حاصل می‌شود:

$$HC \times BC + \overline{BT}^2 + \overline{TD}^2 = \overline{CT}^2 + \overline{TD}^2 \qquad (۲)$$

اما $\overline{BT}^2 + \overline{TD}^2 = \overline{BD}^2$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ BTD) و $CT^2 + TD^2 = CD^2$ (از مثلث قائم‌الزاویهٔ CTD) پس‌تساوی (۲) به صورت زیردرمی‌آید:

$$HC \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2$$

اما از روی شکل واضح است که $AB = HC$ پس‌داریم:

$$AB \times BC + BD^2 = \overline{CD}^2$$

و این‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصرهٔ ۱- استاد درپایان این‌برهان افزوده‌است[۴]:

«چون دراین برهان ازقضیهٔ‌اول استفاده نکرده‌ایم در اینجا می‌توان قضیهٔ‌دوم

را از «سوابق» محسوب داشت.»

تبصرهٔ ۲- (اثبات قضیهٔ اول از روی قضیهٔ دوم توسط ابوعبدالله الشنّی)

استاد یك برهان دیگر(۵) از ابوعبدالله الشنّی برای قضیهٔ اول ذکر کرده است(٦) که قسمت اول آن عیناً مانند برهان فوق است واینك برای مزید فایده بقیهٔ آن را دراینجا نقل می کنم.

ابوعبدالله الشنّی خواسته است که قضیهٔ اول را از قضیهٔ دوم نتیجه بگیرد.

به این ترتیب:

پس از آنکه درستی تساوی زیر

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 \qquad (۳)$$

یعنی حکم قضیهٔ دوم (بدون استفاده از قضیهٔ اول) ثابت شد از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرودآورده ملاحظه می کنیم که:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2$$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ BDE)

و

$$\overline{AD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2$$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ADE)

پس رابطهٔ (۳) را می‌توان چنین نوشت:

$$AB \times BC + \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2$$

وچون $\overline{DE}^2$ را ازدوطرف رابطهٔ فوق کم کنیم حاصل می‌شود:

$$AB \times BC + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 \qquad (۴)$$

بنا براین مجمـوع دوپاره خط AB و BC (نظر به عکس قضیهٔ پنجم از مقالهٔ دوم «اصول‌اقلیدس»(۷)) درنقطهٔ E نصف می‌شود .

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم(۸).

یادداشتهای مربوط به برهان پنجم قضیهٔ دوم :

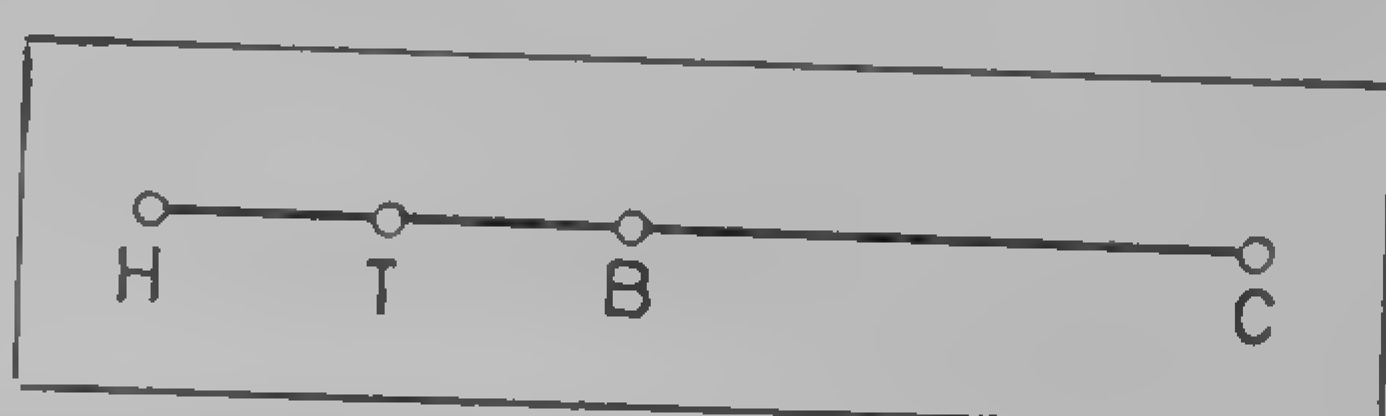
(۱)- عل: ص ۱۶ - سوترA: ص ۲۹ - چد: ص۳۳ و ۳۴ - چم: ص ۷۰

(۲)- دربارهٔ‌ابوعبدالله‌الشنّی رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه» ص ۵۳۰- ونیزرجوع کنید به برهانهای سیزدهم وپانزدهم قضیهٔ اول وبرهـان چهارم قضیهٔ چهارم .

(۳)- قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» رامی‌توان به صورت سادهٔ زیربیان‌کرد:

اگرنقطهٔ T وسط پاره خط BH باشـد و BH راازطرف B به طول دلخواه BC امتداد دهیم رابطه زیربرقرار است :

$$CH.CB + \overline{BT}^{۲} = \overline{CT}^{۲}$$



(شکل۳۹)

(رجوع کنیدبه «هیث E» ج۱ ص ۳۸۵ به بعد. درآنجا بحث‌جالب توجهی‌دربارهٔ این قضیه ونتایج‌آن خواهید یافت - ونیـز رجـوع کنید به «تحریراقلیدس» ص ۳۹)

(۴)- وهذا من‌السوابق لاستغنائه عن‌تلك‌الخاصية .

(۵)- دوبرهان دیگراز ابوعبدالله‌الشنّی برای قضیهٔ اول به عنوان برهانهای سیزدهم وپانزدهم‌آن قضیه گذشت.

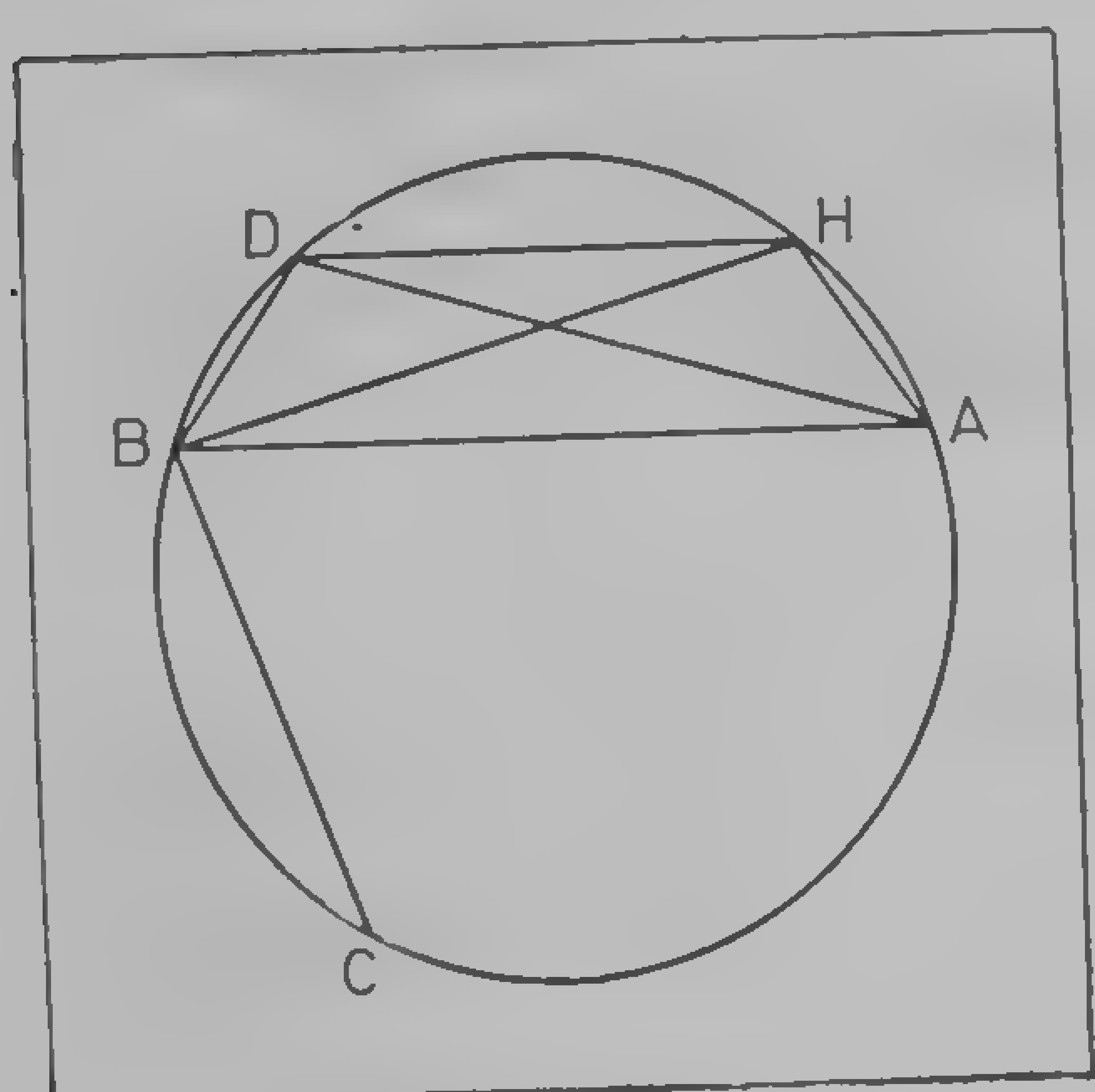
(۶)- عل: ص ۸ - سوتر A : ص ۱۹ - این برهـان در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» به صورت کامل نیامده است.

(۷)- دربارهٔ قضیهٔ پنجم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» رجوع کنید به تبصرهٔ ذیل عنوان قضیهٔ دوم (صفحه ۱۱۲)

(۸)- ابوعبدالله الشنی بدون ذکر دلیل از تساوی (۴) نتیجه گرفتـه است که مجموع دو پاره خط AB و BC در نقطهٔ E نصف می‌شود و برای این مطلب دلیلی ذکر نکرده است. شاید دلیلش همان طور که درمتن نوشتم عکس قضیهٔ پنجم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» بوده‌است. اما عکس این قضیه درکتاب «اصول اقلیدس» ثابت نشده است!

برهان ششم قضیهٔ دوم(۱)- نخستین برهان(۲) از استاد بیرونی.

از نقطـهٔ D وسـط کمـان ABC وتـر DH را به مـوازات AB می کشیم و پاره‌خطهای AH و AD و BH و BD را رسـم می کنیم.



(شکل ۴۰)

چون کمانهای $\widehat{AD}$ و $\widehat{DC}$ باهم و کمانهای $\widehat{AH}$ و $\widehat{BD}$ نیز باهم مساویند داریم : $\widehat{DH} = \widehat{BC}$. بنابراین وترهای DH و BC باهم مساویند.

چون چهارضلعی AHDB در دایره محاط است (نظر به قضیهٔ بطلمیوس(۳)) داریم :

$$AD \times BH = DH \times AB + AH \times BD$$

اما $AD = BH$ و $AH = BD$ و $DH = BC$ بنابراین :

$$\overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصرهٔ ۱ـ درپایان این برهان استاد افزوده‌است(۴) : «چون در این برهان ازقضیهٔ اول استفاده نکرده‌ایم این نیزجزو «سوابق» است (یعنی مانعی ندارد که از آن برای اثبات قضیهٔ اول استفاده کنیم)».

تبصرهٔ ۲ـ این برهان که ازاستاد است ساده‌ترین برهانهایی است که در کتاب «استخراج الاوتار» برای قضیهٔ دوم بیان‌شده است. بااین‌حال معلوم نشد که چرا استاد در کتاب «قانون مسعودی» که بنای آن بر اختصار بوده برهان دیگری برای این قضیه ذکر کرده که از برهان فوق مفصلتر است. (رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحات ۲۸۸ تا ۲۹۰).

یادداشتهای مربوط به برهان ششم قضیهٔ دوم :

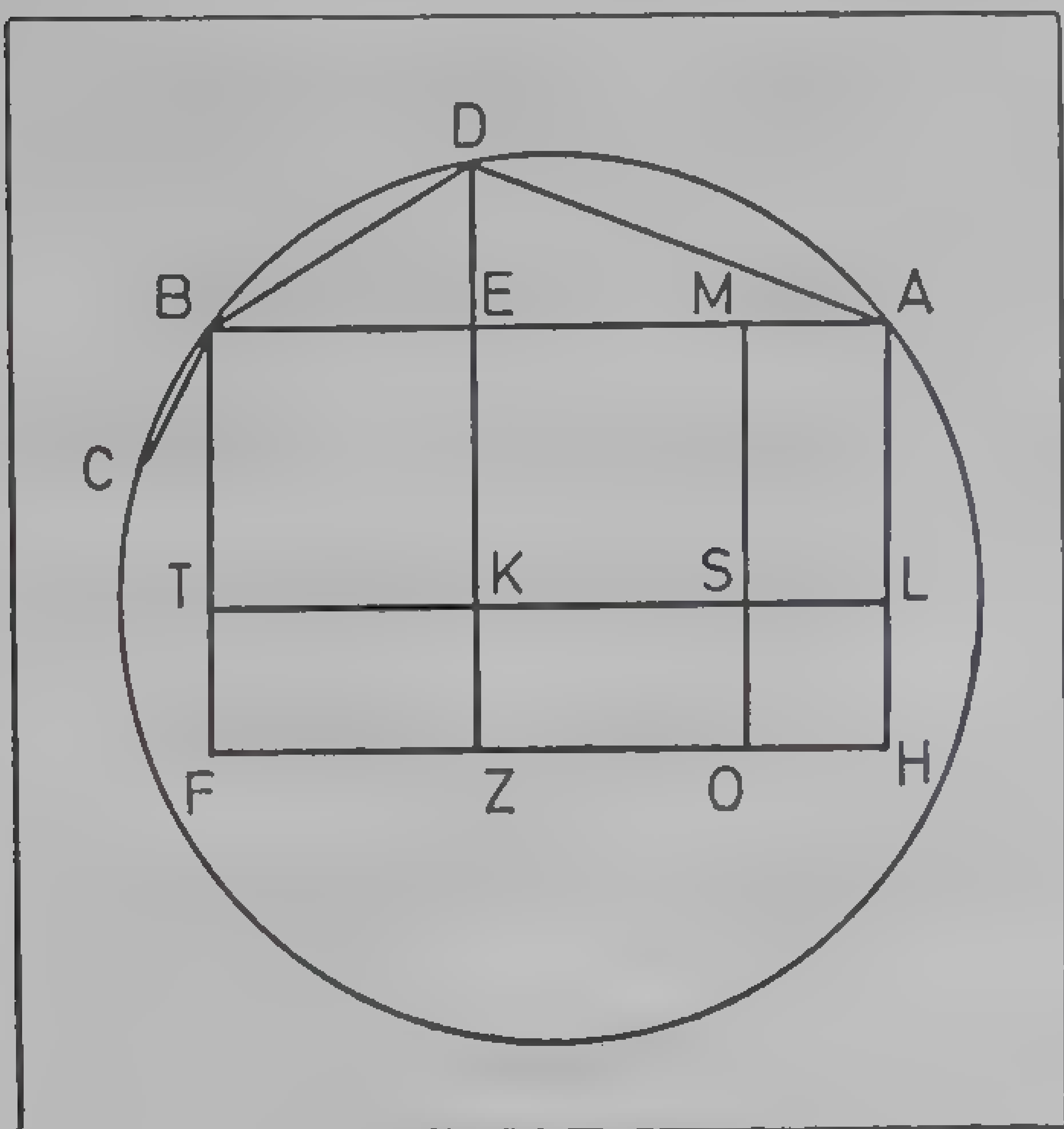
(۱)ـ عل: ص ۱۶ ـ سوتر A : ص۲۹ و ۳۰ ـ چد: ص ۳۴ (سطر پنجم به‌بعد) ـ چم: ص ۷۳ (سطر چهارم به بعد)

(۲)ـ سه برهان دیگر برای قضیهٔ دوم ازاستاد به عنوان برهانهای هفتم تانهم خواهدآمد ـ علاوه بر این استاد برهان دیگری برای این قضیه درکتاب «قانون مسعودی» ذکرکرده است (رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۲۸۸ تا ۲۹۰)

(۳)ـ عنوان قضیهٔ بطلمیوس این است: «درهرچهارضلعی محدب محاطی حاصل ضرب دوقطرمساوی است با مجموع حاصل ضربهای اضلاع متقابل.

(رجوع کنید به «نه مقالهٔ هندسه» بخش اول صفحهٔ ۱۹۲ به بعد)
(۴)- عل : ص ۱۶ : «وهذا ایضامن‌السوابق»

برهان هفتم قضیهٔ دوم(۱) - دومین برهان از استاد بیرونی(۲).



(شکل ۴۱)

از نقطهٔ D (وسط کمان $\widehat{ABC}$) عمود DE را بر AB فرودمی‌آوریم. وروی AE مربع AEZH را بنا می‌کنیم. و نیز روی BE مربع BEKT را می‌سازیم. و TK را امتدادمی‌دهیم تا AH را درنقطهٔ L قطع کند. و روی EA پاره خط EM را مساوی با EB جدا کرده از M خطی به موازات EZ رسم می‌کنیم تا KL را در نقطهٔ S و ZH را درنقطهٔ O قطع کند ومستطیل ABFH را کامل می‌کنیم.

نظر به قضیهٔ‌اول واضح‌است که $AM = BC$ (زیرا E وسط خط شکستهٔ ABC است و $EM = EB$).

(در اینجا استدلال را کمی خلاصه کرده‌ام) و با درنظر گرفتن دومربع AEZH و $EBTK = MEKS$ واضح‌است که $AM = KZ = TF$ و

مساحت مربع BTKE − مساحت مربع AEZH = مساحت مستطیل TFHL

یعنی : $LT \times TF = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$

وچون $LT = AB$ و دیدیم که $TF = AM = BC$ پس رابطهٔ فوق را می‌توان چنین نوشت :

$$AB \times BC = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

اگر به دوطرف این تساوی مقدار $\overline{BD}^2$ را بیفزاییم حاصل می‌شود :

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{BE}^2 \qquad (۱)$$

اما $\overline{BD}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{ED}^2$ (از مثلث قائم‌الزاویهٔ EBD)

پس رابطهٔ (۱) چنین نوشته می‌شود :

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 \qquad (۲)$$

ازطرف دیگر $\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AD}^2$ (ازمثلث قائم‌الزاویهٔ EAD)

پس تساوی (۲) به صورت زیر درمی‌آید :

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$$

و این‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره ــ استاد درپایان این برهان افزوده‌است : «چون در این استدلال ازقضیهٔ‌اول استفاده کرده‌ایم این برهان جزو «لواحق»است»[۳].

یادداشتهای مربوط به برهان هفتم‌قضیهٔ دوم :

(۱)ــ عل: ص ۱۶و۱۷ ــ سوتر A : ص ۳۰ ــ چد: ص ۲۹ و۳۰ چم: ص ۶۴ و۶۵

(۲)ــ درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» درآغازاین برهان‌آمده

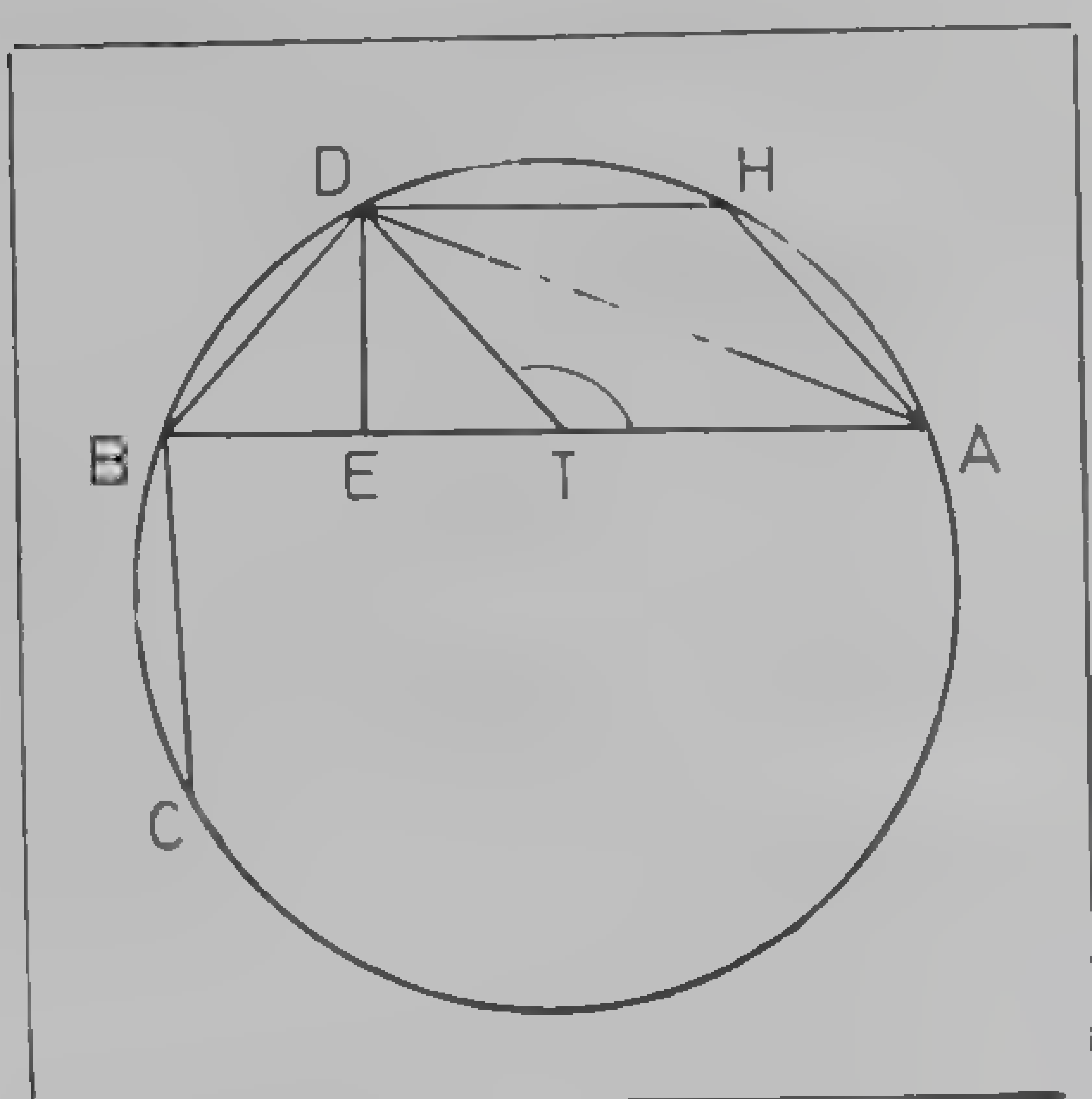
است: «ویجوز ان نبرهنها بطریق السطوح الواقعة تحت الحس» مقصود این است که می‌توان این قضیه را ازروی مساحت شکل‌هاکه محسوس تراست ثابت کرد .

(۳)- عل: ص۱۷ : «وهذا من اللواحق لاضطراره الی تلك الخاصیـة»

برهان هشتم قضیهٔ دوم(۱) - سومین برهان ازاستاد بیرونی

استاد درآغازاین برهان نوشته‌است(۲) : «سومین برهـان از من بدون احالهٔ آن به کتاب مجسطی(۳)» .

(ازنقطـهٔ D وسط کمـان $\widehat{ABC}$) عمـود DE را بـر AB فرودآورده AD راوصل‌می کنیم و از نقطهٔ D وتر DH را بـه موازات AB و DT رابه‌موازات AH رسم می کنیـم. واضح است که $DT = AH = BD$



(شکل۴۲)

زاویهٔ DTA منفرجه‌است و (درمثلث ADT نظر به‌قضیهٔ‌مربوط به‌مربع‌ضلع مقابل به‌زاویهٔ منفرجه) داریم :

$$\overline{AD}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{DT}^2 + AT \times BT \qquad (۱)$$

(زیرا $BT = 2ET$) . اما:

$$AT^2 + AT \times BT = AT(AT + BT) = AT \times AB$$

پس رابطهٔ (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{AD}^2 = \overline{DT}^2 + AB \times AT = \overline{BD}^2 + AB \times AT \quad (۲)$$

ازطرف دیگر $AT = HD$ و $HD = BC$ است و $BE = ET$ بنابراین تساوی (۲) به صورت زیردرمی‌آید:

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + AB \times BC$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره - درپایان این برهـان استـاد افزوده‌است: «وهذامن‌السوابق» یعنی چون دربرهان فوق ازقضیهٔ اول استفاده نکـرده‌ایم مانعی ندارد که برای قضیهٔ اول ازآن استفاده کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان هشتم قضیهٔ دوم:

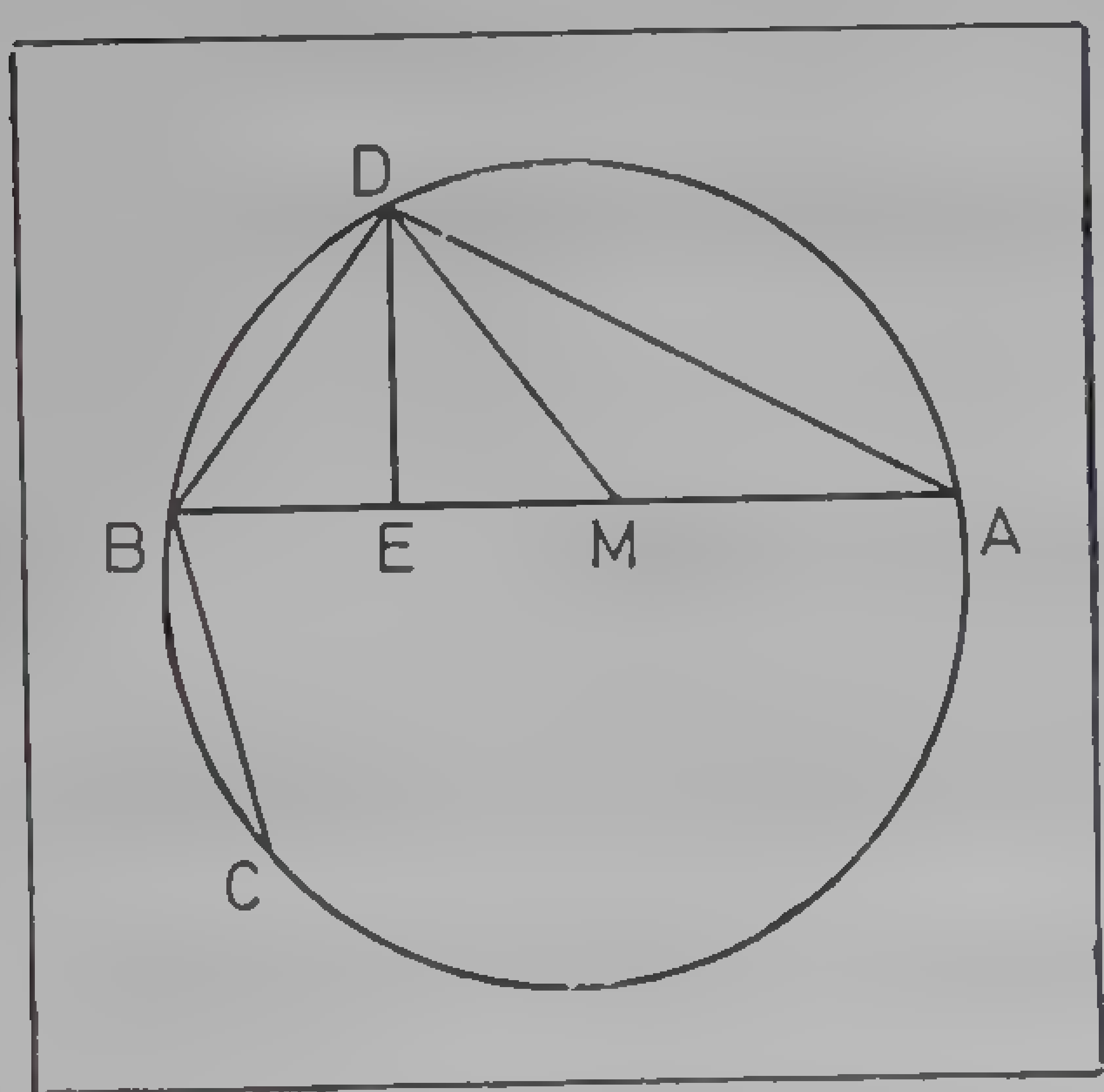
(۱)- عل: ص ۱۷ - سوتر A: ص ۳۰و۳۱ ونیزصفحات ۶۸و۶۹- چد: ص ۳۵ - چم: ص ۷۳

(۲)- عل: ص ۱۷: «برهان ثالث لی علیها من غیر احالة علی المجسطی» - چد: ص ۳۵: «وقلت‌فی‌موضع‌آخرغیراحالةعلی‌کتاب‌المجسطی»

(۳)- سوتر نوشته است (سوتر A: ص ۶۹) که معنی جملهٔ «من غیراحالة علی‌المجسطی» روشن نیست.

من‌تصورمی‌کنم‌که چون‌استاد برهان اول خود را با استفاده ازقضیهٔ بطلمیوس‌که درکتاب مجسطی‌آمده بیان‌کرده است می‌خواهد بگوید که در اینجا همین قضیه را بدون استفاده ازکتاب مجسطی یعنی بدون به‌کاربردن قضیهٔ بطلمیوس ثابت می‌کند. ودلیل قاطع این امراین است‌که درکتابهـای استخراج‌الاوتارچاپی این برهان بلافاصله بعداز برهان اول که وابسته به قضیه بطلمیوس است‌آمده.

برهان نهم قضیهٔ دوم(۱) - چهارمین برهان از استاد بیرونی.



(شکل ۴۳)

عمود DE را از نقطهٔ D (وسط کمان $\widehat{ABC}$) بر AB فرود آورده EM را روی EA مساوی با EB جدا می‌کنیم. به این ترتیب نقطهٔ E وسط پاره خط MB است و چون نقطهٔ A در امتداد BM واقع است (نظر به قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس(۲)») داریم:

$$AB \times AM + \overline{EM}^2 = \overline{AE}^2$$

چون به دوطرف این تساوی مقدار DE^2 را بیفزاییم حاصل می‌شود:

$$AB \times AM + \overline{EM}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 \qquad (1)$$

اما درمثلثهای قائم‌الزاویهٔ DEB و AED داریم:

$$\overline{DE}^2 + \overline{EM}^2 (= \overline{EB}^2) = \overline{BD}^2 \quad \text{و} \quad \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AD}^2$$

پس رابطهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$AB \times AM + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 \qquad (2)$$

ازطرف دیگر درقضیهٔ اول ثابت شد که $AM = BC$ پس تساوی (۲) را می‌توان

چنین نوشت(۳) :

$$AB \times BC + \overline{BD}^{2} = \overline{AD}^{2}$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره – در پایان این برهان استاد افزوده است : «وهذا ایضا من اللواحق لما ذکرناه کره» یعنی به همان دلیل که چند بار گفته‌ایم این برهان نیز از «لواحق» است (زیرا درآن ازقضیهٔ اول استفاده شده است) .

یادداشتهای مربوط به برهان نهم قضیهٔ دوم :

(۱)– عل: ص۱۷ – سوتر A : ص ۳۱ – چد: قسمت آخرص ۲۶ وقسمت اول صفحهٔ ۲۷ – چم: ص ۶۱، سطرچهارم به بعد.

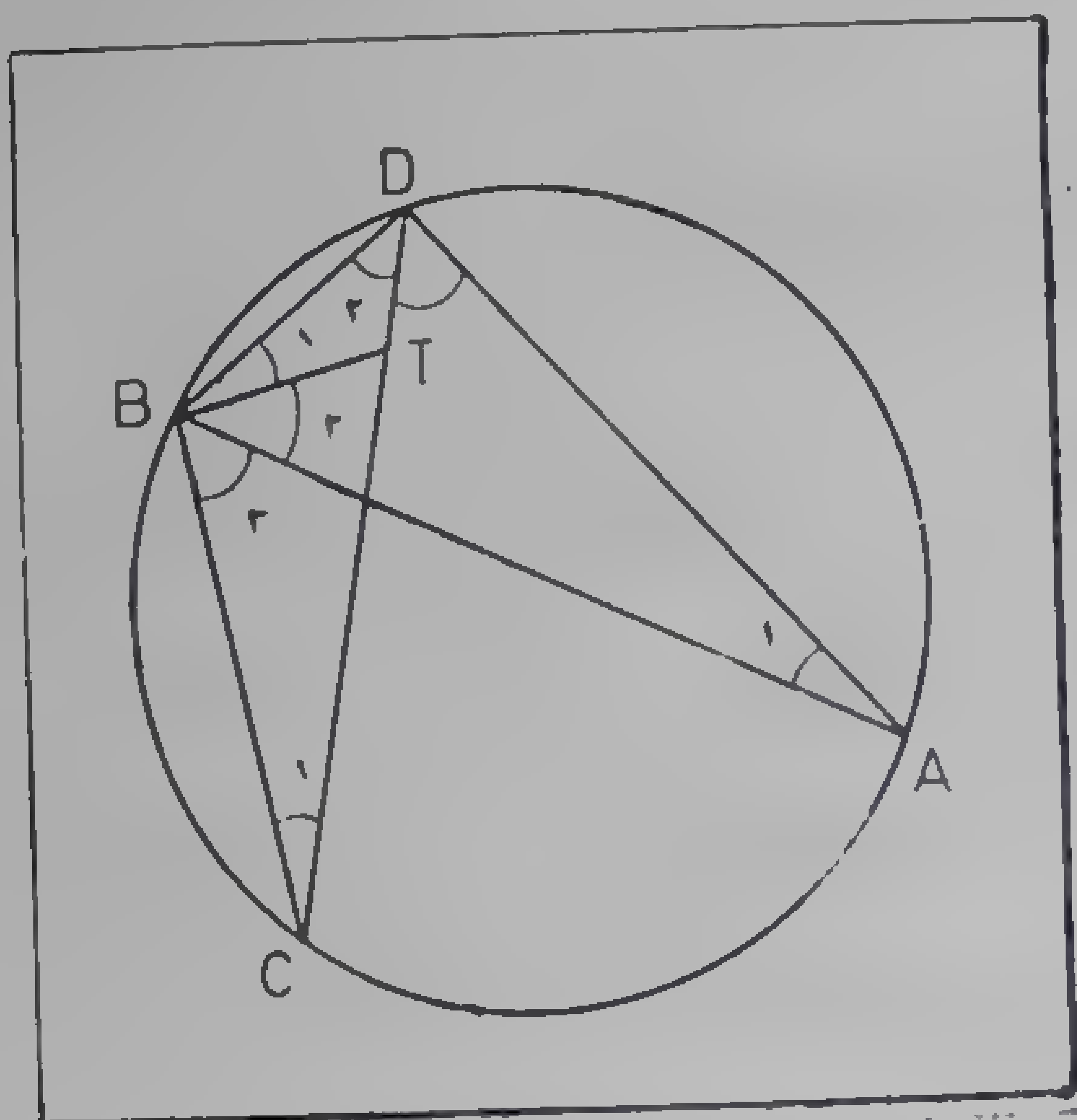
(۲)– دربارهٔ قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم .

(۳)– ظاهراً درنسخهٔ خطی «عل» عبارت سطر سوم ازآخرصفحهٔ ۱۷ افتادگی دارد و باید چنین تصحیح شود (وگرنه برهان ناقص خواهدبود): «و **اد** یقوی علی **اه** و **هد** فضرب **ب**فی**ام** (اعنی**بج**) ومربع...»

برهان دهم قضیهٔ دوم(۱) – ازابوالحسن بن بامشادقاینی(۲).

(این برهان در نسخهٔ خطی «عل» نیامده ولی در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» دیده می‌شود(۳)) .

از نقطهٔ B خط BT را (مطابق با شکل) طوری رسم‌می کنیم که زاویهٔ $\widehat{B_1} = \widehat{DBT}$ مساوی با زاویهٔ C_1 شود. دراین صورت واضح است که دو مثلث DCB و DBT که دارای یک زاویهٔ مشترک (درأس D) و دوزاویهٔ متساوی‌هستند متشابهند و داریم $\frac{CD}{DB}=\frac{BD}{TD}$ و ازآنجا :



(شکل ۴۴)

$$\overline{BD}^2 = CD \times TD \qquad (۱)$$

اکنون می گوییم مجموع دوزاویهٔ D_2 و C_1 که هردومحاطی وروبه روی کمانهای $\widehat{CB}$ و $\widehat{BD}$ هستند مساوی است با زاویهٔ ABD که محاطی وروبه روی کمان $\widehat{AD}$ است (زیرا $\widehat{AD} = \widehat{DBC}$) یعنی داریم :

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_1 + \hat{D}_2$$

و چون $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ پس $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ (۲)

از طرف دیگر $\hat{B}_3 = \hat{D}_3$ (D_3 یعنی $\widehat{ADC}$) (۳)

زیرا هردومحاطی و روبه روی کمان $\widehat{AD}$ هستند. از جمع دو تساوی (۲) و (۳)

عضو به عضو حاصل می‌شود $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{D}_1 + \hat{D}_2$

یعنی $\widehat{CBT} = \widehat{ADB}$

و چون $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (هردومحاطی و روبدروی یك کمان هستند) پس دومثلث ADB

و CBT متشابه‌اند و داریم $\frac{AB}{CT} = \frac{AD}{BC}$ یعنی

$$AB \times BC = AD \times CT \qquad (4)$$

اکنون دو تساوی (۱) و (۴) را عضو به عضو با هم‌جمع می کنیم حاصل می‌شود:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = AD \times CT + CD \times TD$$

ویا بادرنظر گرفتن اینکه $CD = AD$:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = CD(CT + TD)$$

و یا

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان دهم قضیهٔ دوم :

(۱)- چد: ص ۳۷ - چم : ص ۷۵

(۲)- ابوالحسن علی بن عبدالله‌بن محمد. بامشاد‌قاینی ازریاضی‌دانان ومنجمان ایرانی بودکه درزمان بیرونی ویا شاید پیش‌از وی می‌زیست. از وی دومقاله دردست‌است (رجوع کنیدبه مقاله «قربانی: ابوالحسن‌بن‌بامشاد قاینی» - یك برهان نیز از ابوالحسن بامشاد برای قضیهٔ سوم خواهد آمد

(برهان اول قضیه سوم)

(۳)- برای آنکه بیان استدلال روشنتر باشد بدون آنکه در آن تغییری بدهم مطالب آن را کمی پس و پیش کرده‌ام .

برهانهای یازدهم و دوازدهم قضیهٔ دوم - یك برهان دیگر برای قضیهٔ دوم از استاد بیرونی در کتاب «قانون مسعودی» ذکر شده است (رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۲۸۸ تا ۲۹۰) .

در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد : ص۳۸ ـ چم : ص۷۶) یك برهان از ابوالحسن بصری برای قضیهٔ دوم آمده است که چون مفصل و نارسا است از ذکر آن صرف نظر می کنم و یك مطلب هم از سلیمان بن عصمة سمرقندی ذکر شده (چد:ص۳۶ـچم: ص۷۴) که الحاقی به نظر می آید. (در بارهٔ سلیمان بن عصمة رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۵۳۸ و ۵۳۹).

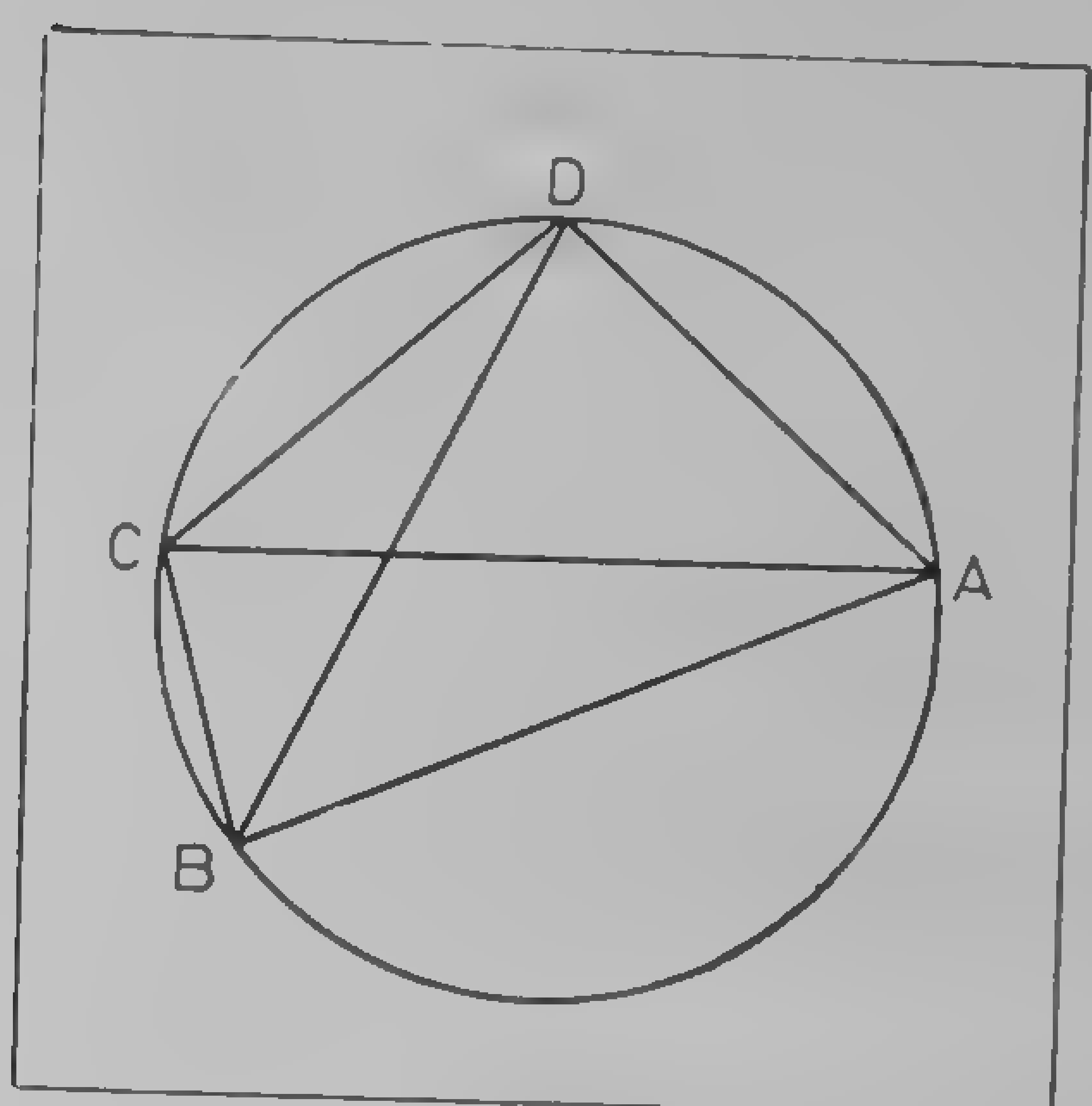
۵ - عنوان قضیهٔ سوم

در نسخهٔ خطی «عل» از کتاب «استخراج الاوتار» این قضیه و قضیهٔ چهارم هیچ یك جداگانه نیامده است ولی درضمن بعضی از برهانهای دو قضیهٔ اول و دوم ثابت شده و مورد استفاده قرار گرفته است[1]. با این حال چون در نسخه‌های چاپی «استخراج-

الاوتار» (چد : صفحات ۳۹ تا ۴۵ ـ چم: صفحات ۷۸ تا ۸۵) این قضیه جداگانه آمده و چند برهان برای آن بیان شده‌است اینك به ذکر آن می‌پردازم.

استاد این قضیه را به‌عنوان اتمام قضیهٔ دوم ذکر کرده و آن‌را قسم دیگری از قضیهٔ دوم دانسته و نوشته است: «اتمام هذه الدعوی الثانیه بقسمها الثانی حتی تکون دعوی ثالثة».

عنوان قضیهٔ سوم(۲) ـ این قضیه را می‌توان به صورت سادهٔ زیر بیان کرد (عبارت عربی آن را در یادداشت ذیل نوشته‌ام) :



(شکل ۴۵)

اگر وسط کمان $\widehat{AC}$ از دایره‌ای را نقطهٔ D بنامیم و در دنبال کمان $\widehat{AC}$ کمان دیگر $\widehat{CB}$ از دایره را درنظر بگیریم رابطهٔ زیر بین وترهای این کمانها برقرار خواهد بود :

$$AB \times BC + \overline{DC}^{2} = \overline{DB}^{2}$$

به عبارت‌دیگر:

اگر دریك دایره به کمان مفروض $\widehat{AC}$ کمان اضافی $\widehat{BC}$ را بیفزاییم ، حاصل ضرب وتر مجموع این دو کمان در وتر کمان اضافی $\widehat{BC}$ به علاوهٔ مربع وتر نصف کمان مفروض مساوی خواهد بود با مربع وتر مجموع نصف کمان مفروض و کمان اضافی.

یادداشتهای مربوط به عنوان قضیهٔ سوم

(۱)- مثلاً برهان سوم قضیهٔ چهارم درنسخهٔ «عل» در ضمن برهان شانزدهم قضیهٔ اول ذکرشده است.

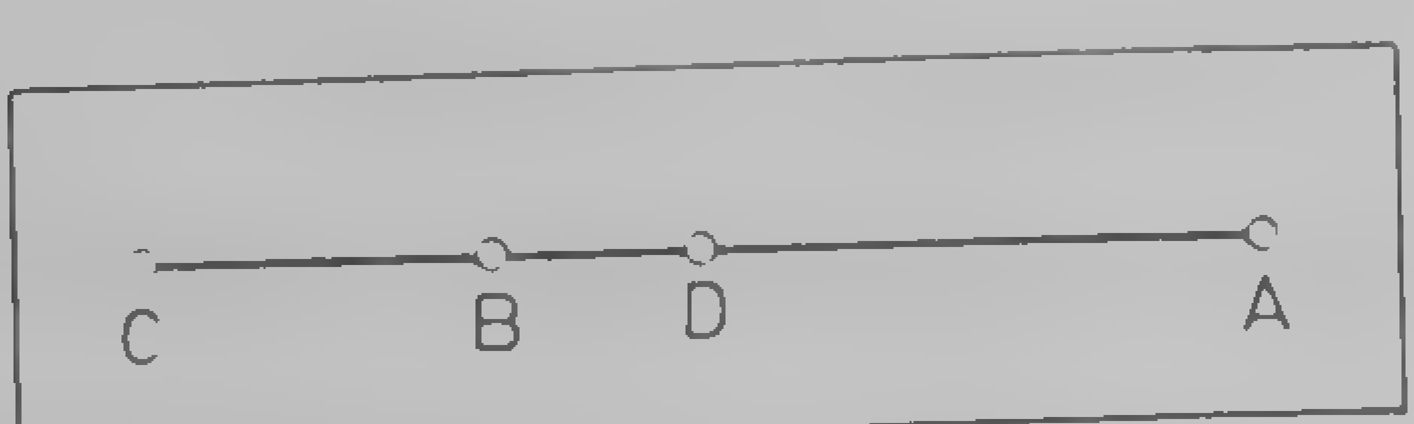
(۲)- استاد در بارهٔ این قضیه نوشته است (چد: ص ۳۹ - چم : ص ۷۸) :

«وکماان قسمةالقوس بنصفین وبقسمین مختلفین‌افادت فی‌اوتار خاصیة مشابهة لمایقبلهاالخطالمستقیم‌المنقسم‌کذلك، فان‌القوس‌المعطاة اذاقسمت بنصفین وزیدعلیها من‌دائرتها قوس ماعلی‌استدارتها ، فان‌اوتارتلك الاقسام تقبل‌ایضا خاصیة شبیهة مایقبلها الخـطالمستقیم‌کذلك و هی‌ان **مضروب وترالقوس‌المعطاة مع‌الزیادةفی‌وتر الزیادةمع‌مربع (وتر) نصف القوس‌المعطاة یساوی مربع‌وترمجموع هذاالنصف مع‌الزیادة»**

به طورخلاصه مقصود استاد این‌است که همان گونه‌که قضیهٔ‌دوم (که ذکرش گذشت) دربارهٔ‌اوتاردایره نظیرقضیهٔ پنجم‌ازمقالهٔ دوم «اصول‌اقلیدس» (دربارهٔ تقسیم پارهٔخطهای راست) است، قضیهٔ سوم نیزنظیرقضیهٔ ششم‌از مقالهٔ‌دوم «اصول اقلیدس» است.

اینـك بـرای روشن شدن ایـن مطلب ذیـلاً قضایای دوم وسـوم «استخراج‌الاوتار» را بانظایرآنها یعنی قضایای پنجم وششم کتاب «اصـول اقلیدس» درپی یکدیگرذکرمی‌کنم (اگرچه یك بار این کار را در «بیرونی‌ـ نامه» کرده‌ام)

قضیه‌پنجم ازمقالهٔ‌دوم «اصول اقلیدس»:

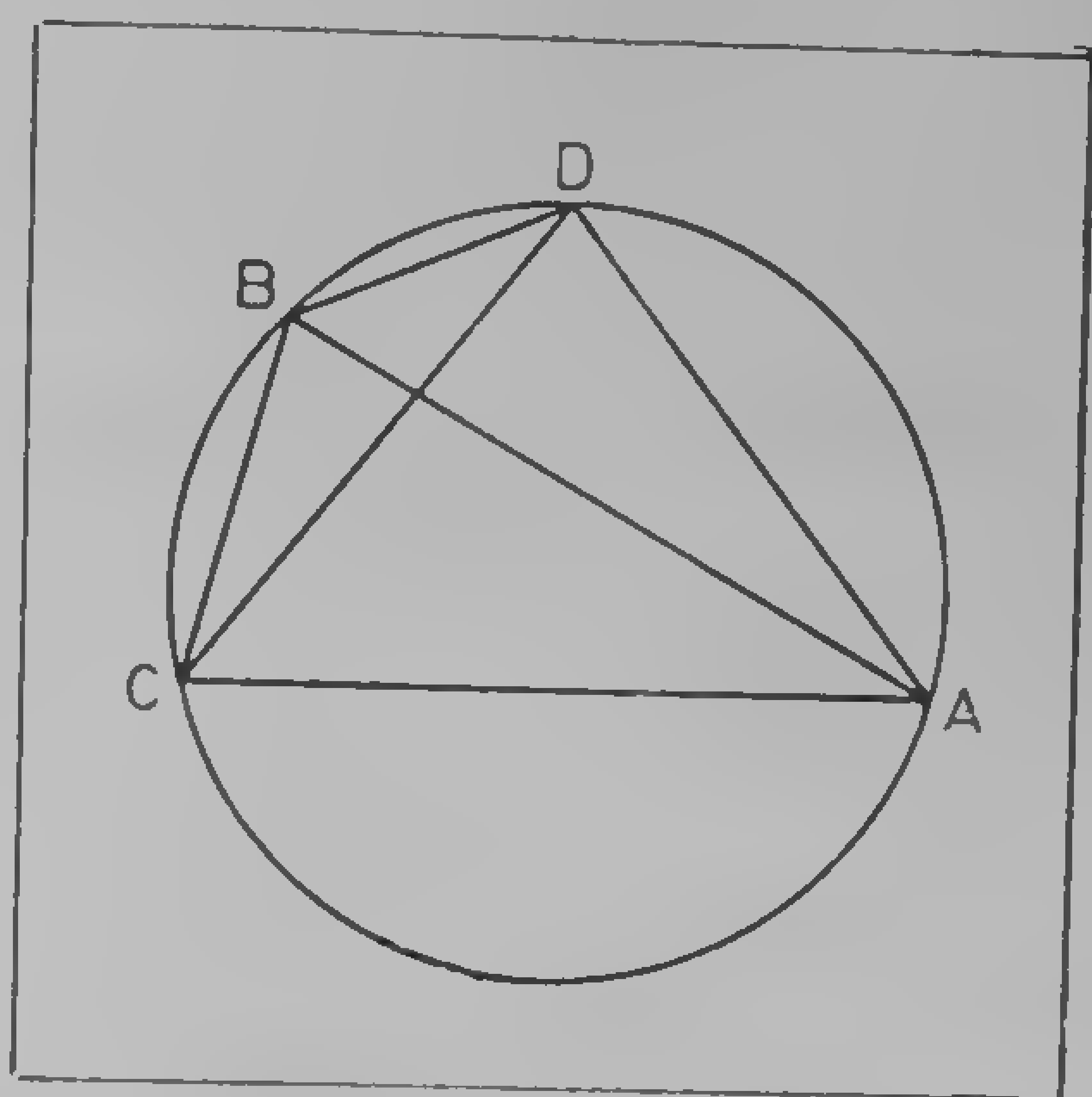


(شکل۴۶)

نقطهٔ D وسط پاره خط AC و نقطهٔ B نقطه‌ای دلخواه از پاره خط AC است و داریم : $AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2$

(و رجوع کنید به تبصرهٔ ذیل عنوان قضیهٔ دوم - ص ۶۲)

قضیه دوم «استخراج الاوتار» (نظیر قضیهٔ پنجم از مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس»):

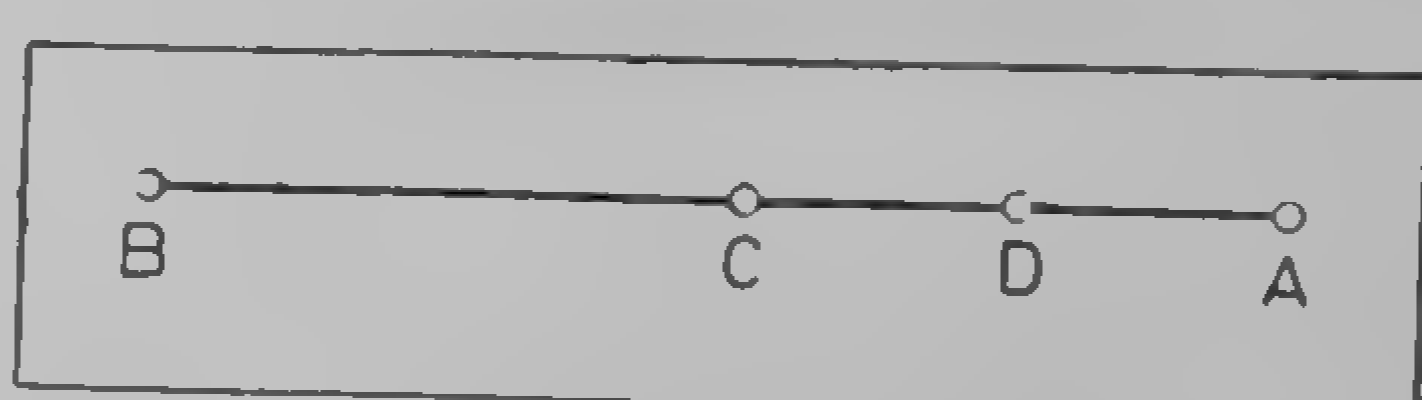


(شکل ۴۷)

نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ و نقطهٔ B نقطه‌ای اختیاری از همان کمان است و داریم:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2$$

قضیهٔ ششم از مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» :



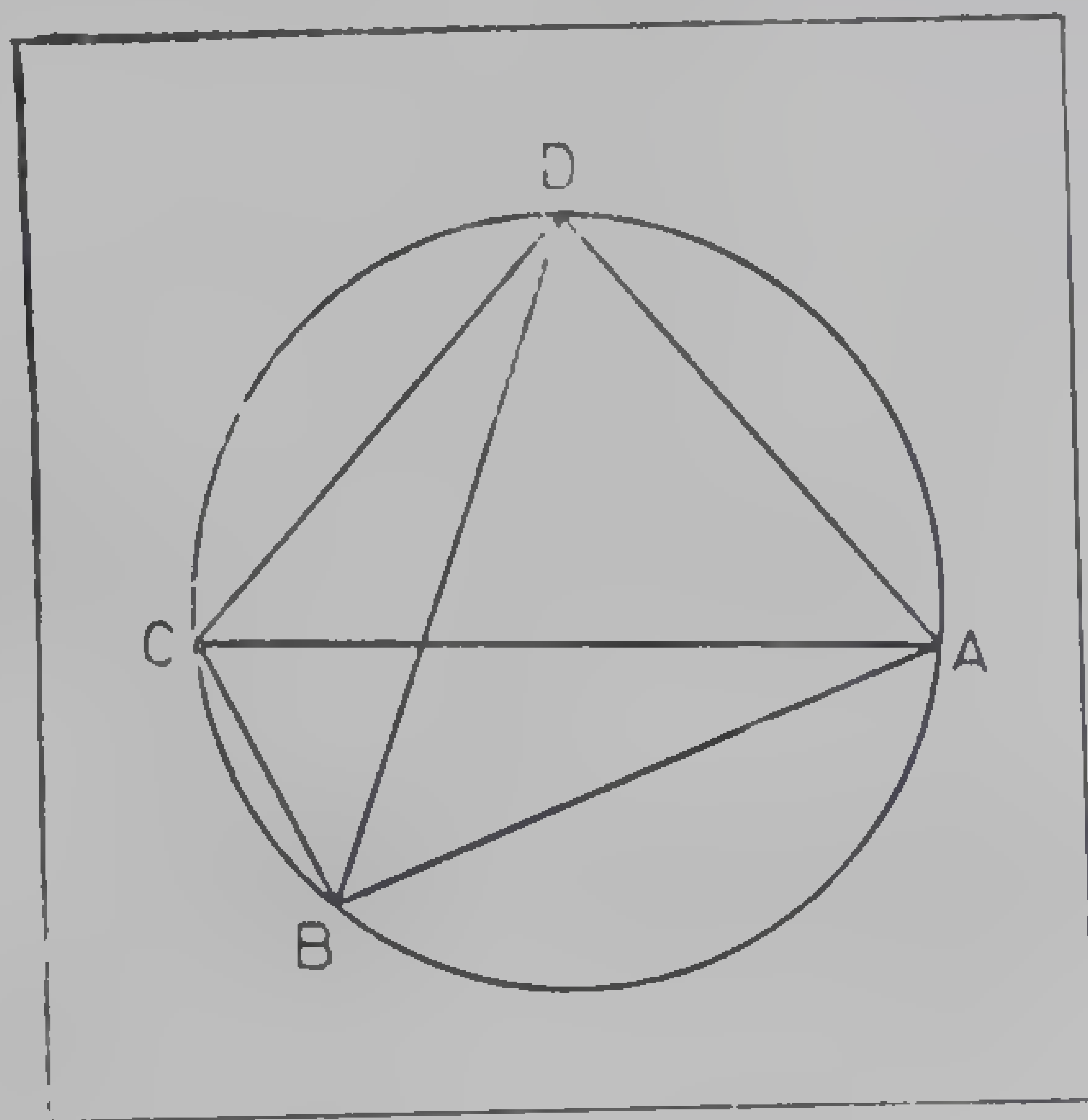
(شکل ۴۸)

نقطهٔ D وسط پاره خط AC و نقطهٔ B نقطه‌ای اختیاری واقع روی امتداد

پاره خط AC است وداریم : $AC.AB + \overline{CD}^2 = \overline{DB}^2$

(ورجوع کنید به‌یادداشت شمارهٔ(۳) ذیل برهان‌پنجم قضیهٔ‌دوم (صفحه۱۲۹)

قضیهٔ‌سوم«استخراج الاوتار»(نظیر قضیهٔ‌ششم مقالهٔ‌دوم«اصول اقلیدس»):



(شکل ۴۹)

نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ ونقطـهٔ B نقطه‌ای اختیاری واقع روی دایره ودر خارج کمان مذکوراست وداریم:

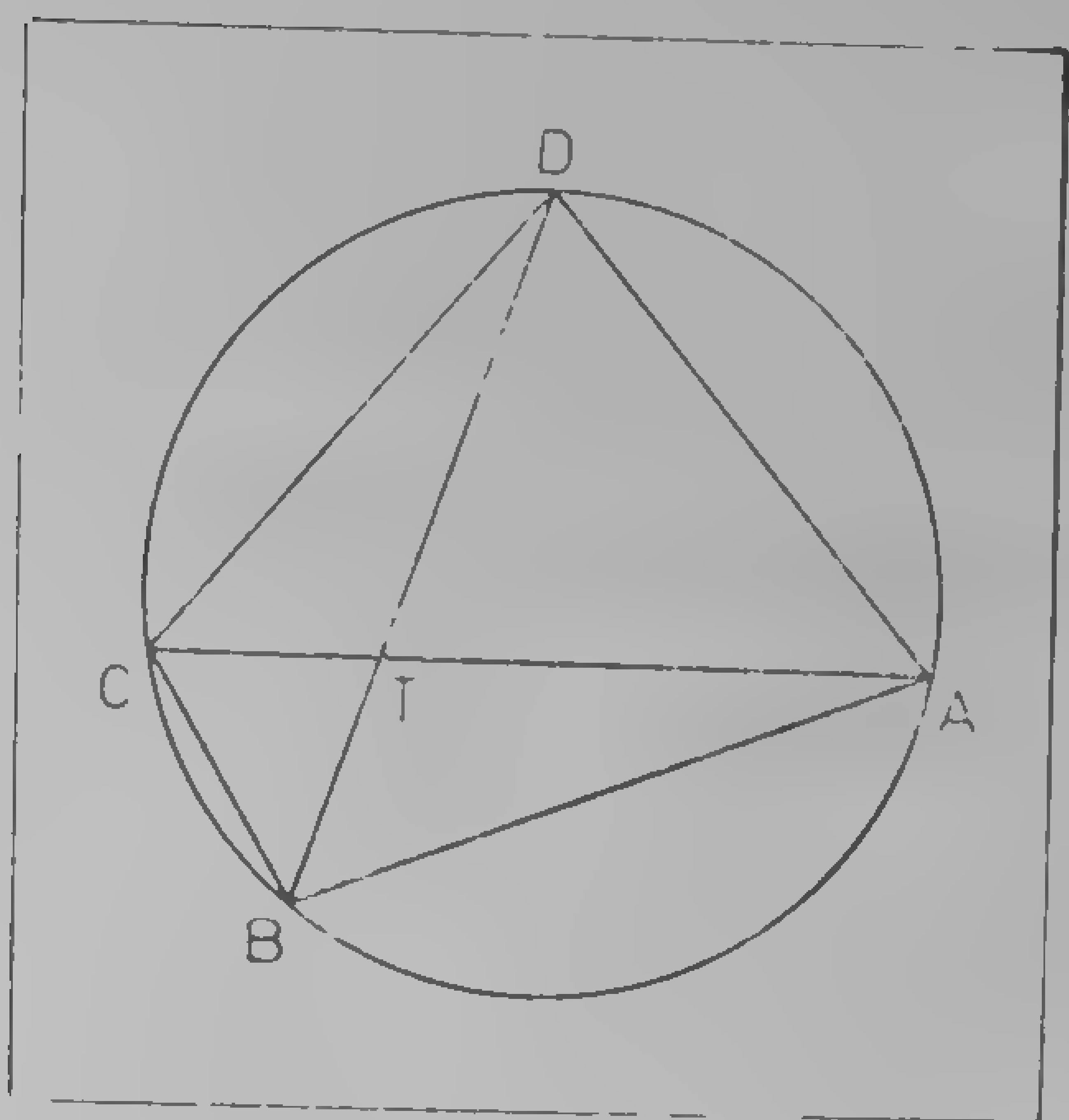
$$AC \times AB + \overline{CD}^2 = \overline{DB}^2$$

و - برهانهای قضیهٔ سوم

(درهمهٔ شکلهای مربوط به این برهانها نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ از دایره و کمان $\widehat{BC}$ دنبالهٔ کمان $\widehat{ADC}$ است و باید ثابت کرد :

$$AB \times BC + \overline{DC}^2 = \overline{DB}^2$$

برهان اول قضیهٔ سوم(۱) - از ابوالحسن بن بامشاد(۲).



(شکل ۵۰)

نقطهٔ D وسط کمان AC را بـه نقطهٔ B وصل کـرده فصل مشترك BD و AC را نقطـهٔ T می‌نامیم.

دومثلـث BDC و BAT متشابهند. زیرا $\widehat{CBD}=\widehat{DBA}$ (نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ است) و $\widehat{CAB}=\widehat{CDB}$ (محـاطـی و روبه روی یك کمان هستند) پس داریم:

$$\frac{AB}{BT}=\frac{DB}{BC}$$

و یا

$$AB\times BC=BT\times DB \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر دومثلث BCD و CTD متشابهند. زیرا زاویهٔ D در هـر دو مشترك است و $\widehat{DCT}=\widehat{DBC}$ (زیرا محاطی وروبه‌روی دو کمان متساویند) بس داریم:

$$\frac{BD}{CD}=\frac{CD}{TD}$$

و یا

$$\overline{CD}^{2}=DB\times TD \qquad (۲)$$

ازجمع‌دوتساوی (۱) و (۲) عضو به عضو حاصل می‌شود

$$AB\times BC+CD^{2}=BT\times DB+DB\times TD=DB(BT+TD)$$

یعنی $AB \times BC + \overline{CD}^2 = \overline{DB}^2$

واین همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان اول قضیهٔ سوم :

(۱)- چد : ص ۴۰ و۴۱- چم : ص ۷۹ و ۸۰

(۲)- دربارهٔ ابوالحسن بن بامشاد رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۲) ذیل برهان دهم قضیهٔ دوم (صفحهٔ ۱۳۹) - یك برهان نیز از ابوالحسن بن بامشاد برای قضیهٔ دوم گذشت (برهان دهم قضیهٔ دوم)

برهان دوم قضیهٔ سوم(۱) - از ابوجعفر خازن(۲).

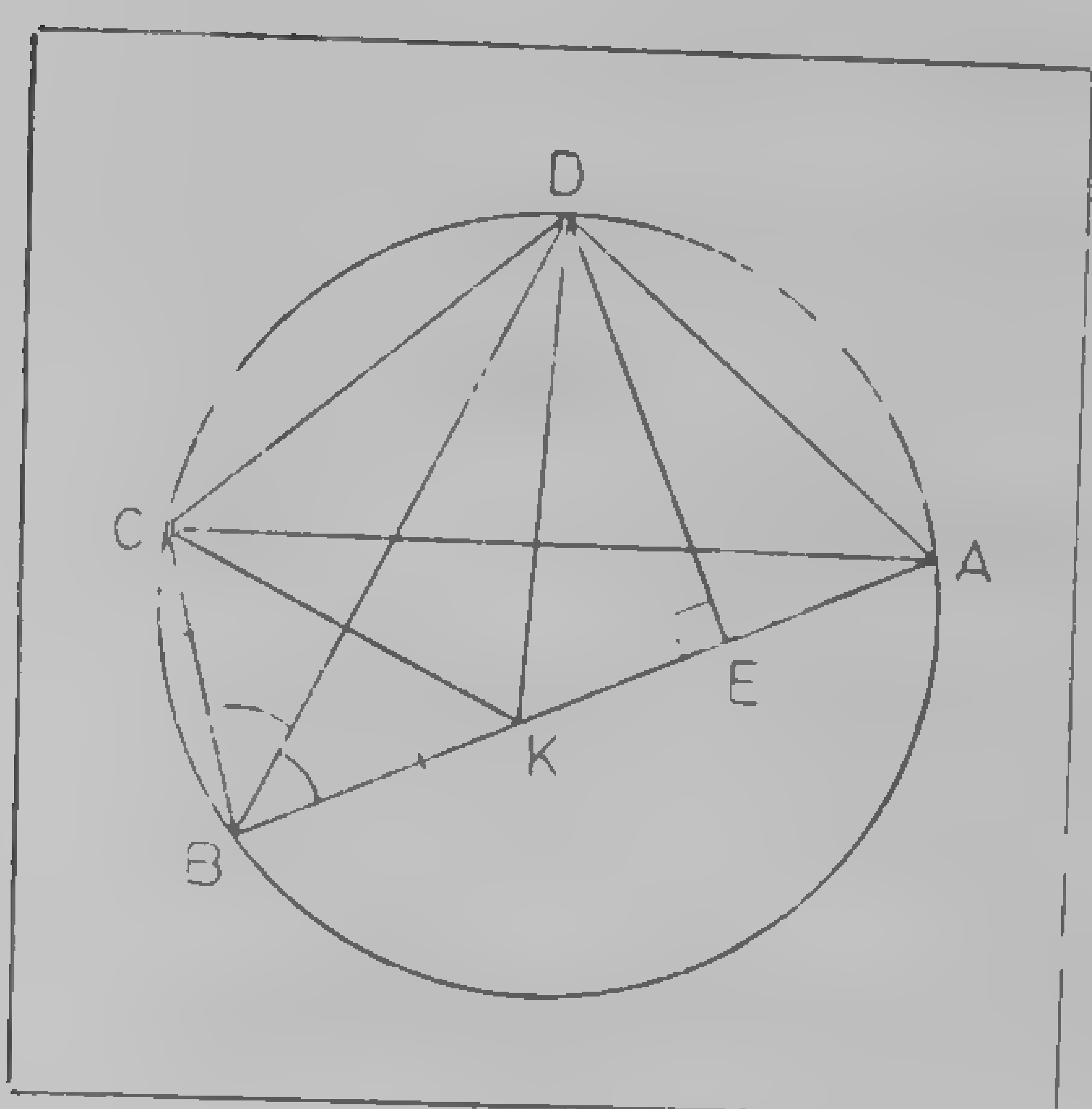
برهان ابوجعفر خازن اصولا مانند برهان ابوالحسن بامشاد است جز اینکه وی تساوی $AB \times BC = BT \times DB$ یعنی رابطهٔ (۱) برهان اول را از تشابه دو مثلث ABD و TBC به دست آورده و تساوی $\overline{CD}^2 = DB \times TD$ یعنی رابطهٔ (۲) برهان اول را از تشابه دو مثلث ATD و BAD و در نظر گرفتن تساوی $AD = CD$ نتیجه گرفته است.

یادداشتهای مربوط به برهان دوم قضیهٔ سوم :

(۱)ـ چد : ص۴۱ ـ چم : ص ۸۱

(۲)ـ ابوجعفر محمدبن حسین خراسانی خازن یکی از رجال نجوم و ریاضی درنیمهٔ اول قرن چهارم هجری بود که در خراسان متولد شد ودر اواخر عمر در ری می‌زیست. برای آگاهی یافتن ازتألیفات وی رجوع کنید به «قربانی: ریاضیدانان» صفحات ۸۸ تا ۹۴

برهان سوم قضیهٔ سوم(۱) ـ ازشخصی نامعلوم(۲).



(شکل۵۱)

A را به B وصل کرده روی AB طول BK را مساوی با BC جدا می کنیم وپاره‌خطهای KC و KD را رسم می‌نماییم و ازنقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم.

دو مثلث BKD و BCD درحالت دوضلع و زاویهٔ بین آنها متساویند (BK = BC و BD مشترك).

بنابراین KD = CD و چون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ است داریم :

$$KD = CD = DA$$

پس مثلث DKA متساوی‌الساقین است و عمود DE قاعدهٔ آن یعنی KA را نصف می کند.

پس نقطهٔ E وسط پاره‌خط KA است و چون نقطهٔ B درامتداد آن قراردارد (نظر به قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم اصول «اقلیدس»(۳)) داریم:

$$BA \times BK + \overline{EK}^2 = \overline{EB}^2$$

به دوطرف این تساوی مقدار $\overline{DE}^2$ را می‌افزاییم حاصل می‌شود:

$$AB \times BK + \overline{EK}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{DE}^2 \qquad (۱)$$

وچون ملاحظه کنیم که $BK = BC$ و $\overline{EK}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{DK}^2 = \overline{DC}^2$ (از مثلث قائم‌الزاویهٔ DEK) و $\overline{EB}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{BD}^2$ (ازمثلث‌قائم‌الزاویهٔ BDE) رابطهٔ(۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$AB \times BC + \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به برهان سوم قضیهٔ سوم:

(۱)- چد: ص ۴۲ - چم: ۸۱

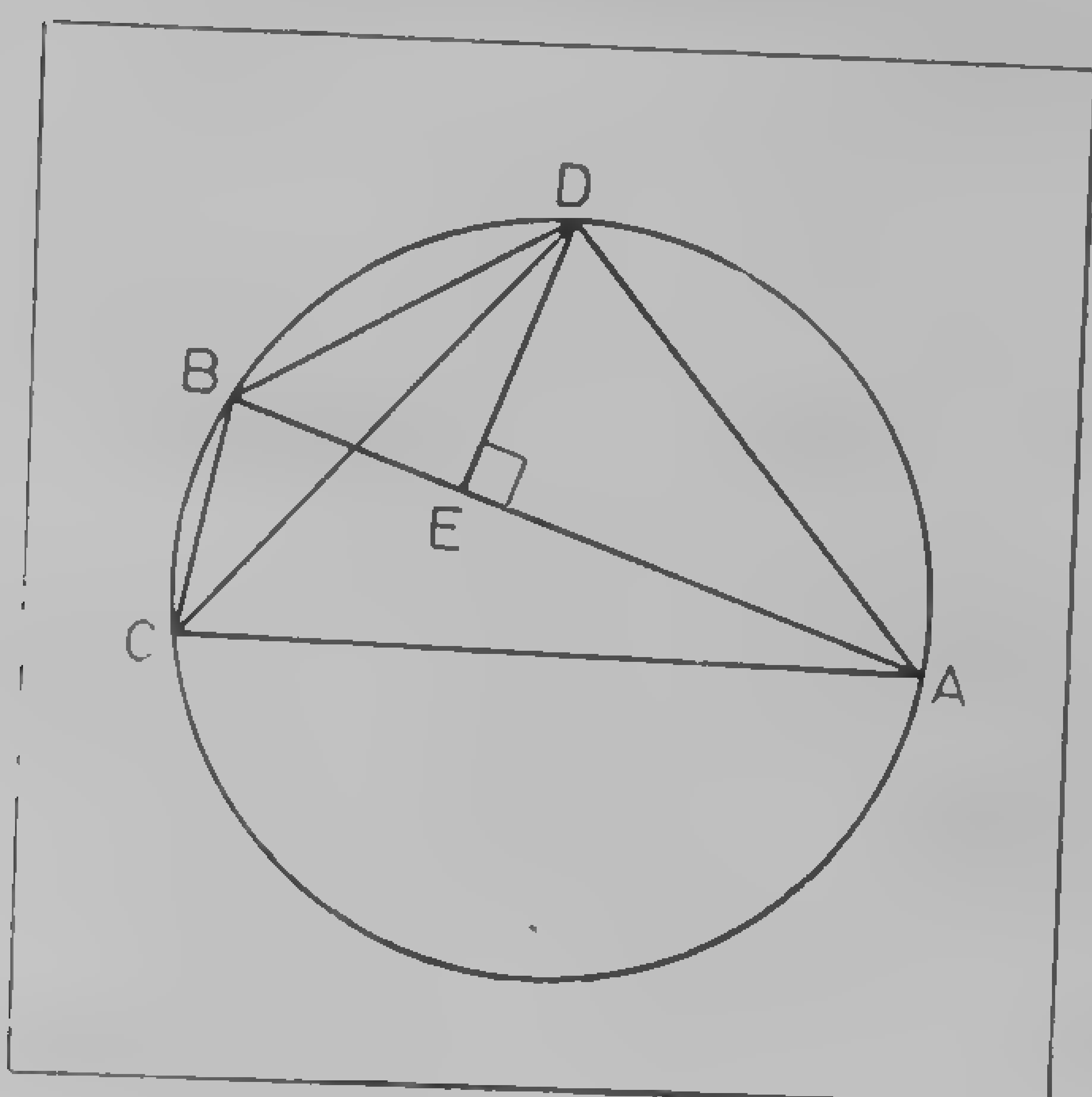
(۲)- استاد درآغاز این برهان نوشته است: «برهان لبعضهم علی ذلك ولم‌یذكر اسمه»

(۳) - رجوع کنید به یاد داشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم

ز ـ عنوان قضیهٔ چهارم

این قضیه نیزمانند قضیهٔسوم درنسخهٔ خطی «علی» نیامده است. بااین حال چون در نسخه‌های چاپی «استخراج‌الاوتار» (چد : ص ۴۵ ـ چم : ص ۸۵) جداگانه ذکروچند برهان برای‌آن بیان شده اینك به ذکرآن می‌پردازم.

عنوان قضیهٔ چهارم(۱) ـ اگر $\widehat{AC}$ کمانی ازدایره ونقطهٔ D وسط‌آن و نقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی متعلق به آن باشد و ازنقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود آوریم، تفاضل مساحتهای مثلث متساوی‌الساقین ACD و مثلث ABC مساوی است با حاصل ضرب $DE \times EB$ (یعنی‌دوبرابرمساحت مثلث BED).



(شکل۵۲)

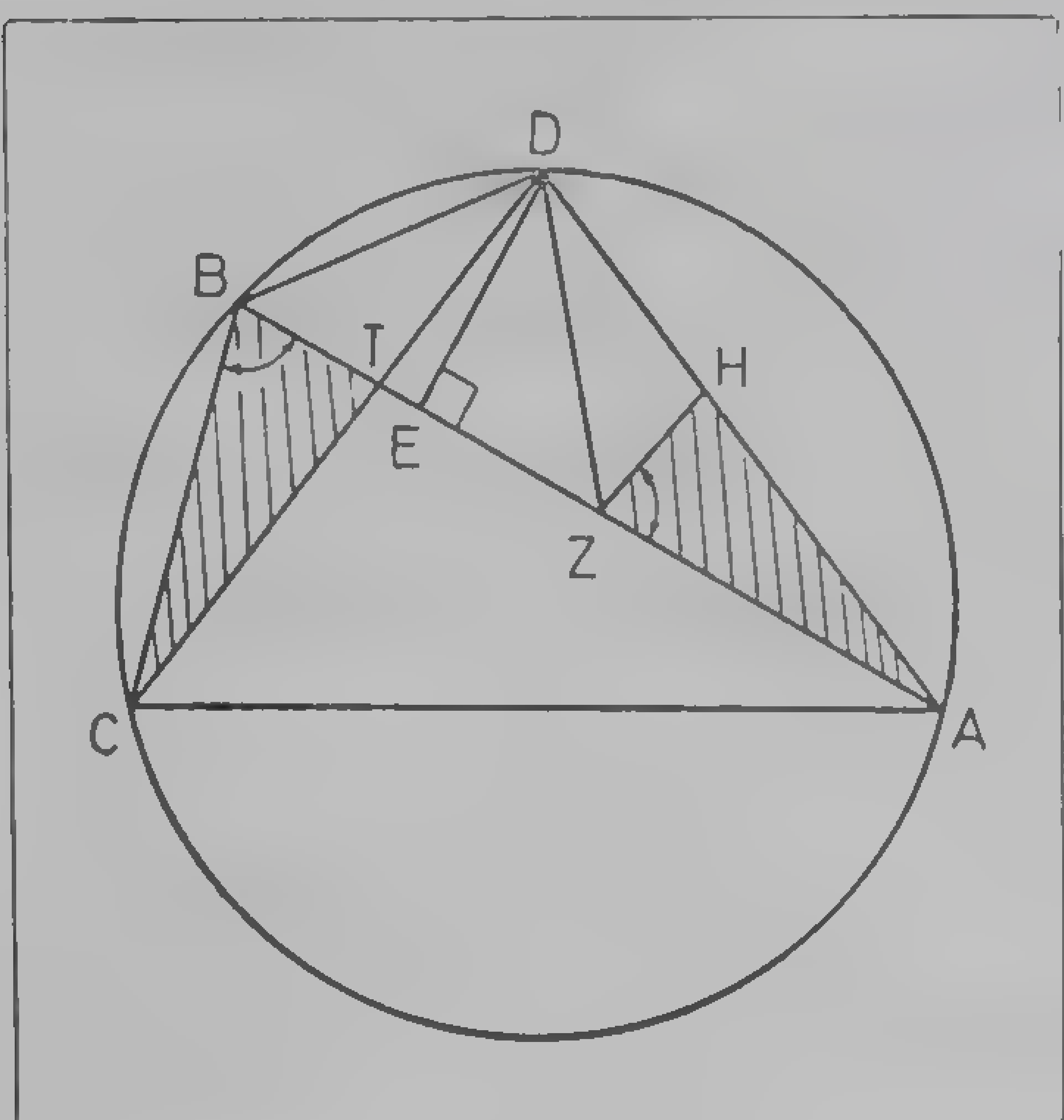
یادداشت مربوط به‌عنوان قضیهٔ چهارم :

(۱)ـ استاد درآغاز این قضیهٔ نوشته است : « وتوجد لهذا الشکل خاصیةاخری نافعه ...»

ح - برهانهای قضیهٔ چهارم

(شکل مربوط به قضیهٔ چهارم عیناً همان شکل مربوط به قضیهٔ اول است یعنی درهمهٔ این برهانها نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{AC}$ ونقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی متعلق به کمان $\widehat{AC}$ و DE عمودبر AB است).

برهان اول قضیهٔ چهارم(۱) - نخستین برهان ازاستادبیرونی.



(شکل۵۳)

فصل مشترك CD و AB را نقطهٔ T می‌نامیم ومساحت هر شکل راباعلامت .s که درسمت چپ اسم آن شکل می‌نویسیم معین می کنیم. مثلاً s. ADC یعنی مساحت مثلث ADC . باید ثابت کنیم که :

$$\delta = s.ADC - s.ABC = DE \times EB$$

سطح مثلث ATC بین‌سطحهای دومثلث ADC و ABC مشترك‌است. اگر این قسمت مشترك‌را از سطحهای آن دو مثلث حذف کنیم برای اثبات رابطهٔ (۱) کافی است نشان دهیم که :

$$\delta = s.ADT - s.BTC = DE \times EB$$

برای این‌کار از روی پاره‌خط EA پاره‌خط EZ را مساوی با EB جدا می‌کنیم. واضح است که دراین‌صورت $BD = DZ$ وچون درقضیهٔ اول ثابت کرده‌ایم که‌نقطهٔ E وسط‌خط‌شکستهٔ ABC‌است (یعنی $AE = EB + BC$) پس $AZ = BC$ و دومثلث AZD و CBD (درحالت سه‌ضلع) باهم‌مساویند.

اکنون‌نقطهٔ H را روی AD طوری‌اختیارمی کنیم که‌زاویهٔ AZH مساوی بازاویهٔ CBT شود. دراین صورت داریم:

$$s.AZH = s.CBT$$

و از روی شکل واضح است که :

(۱) $$s.ADT - s.CBT = s.ADT - s.AZH = s.DTZH$$

وچون $$s.DHZ = s.DTB$$

پس : (۲) $$s.DTZH = s.DBZ$$

اما مساحت مثلث متساوی‌الساقین DBZ مساوی‌است‌با $DE \times EB$ (قاعده‌ضرب‌در نصف‌ارتفاع) پس تساوی (۱) را با درنظر گرفتن تساوی (۲) می‌توان چنین‌نوشت:

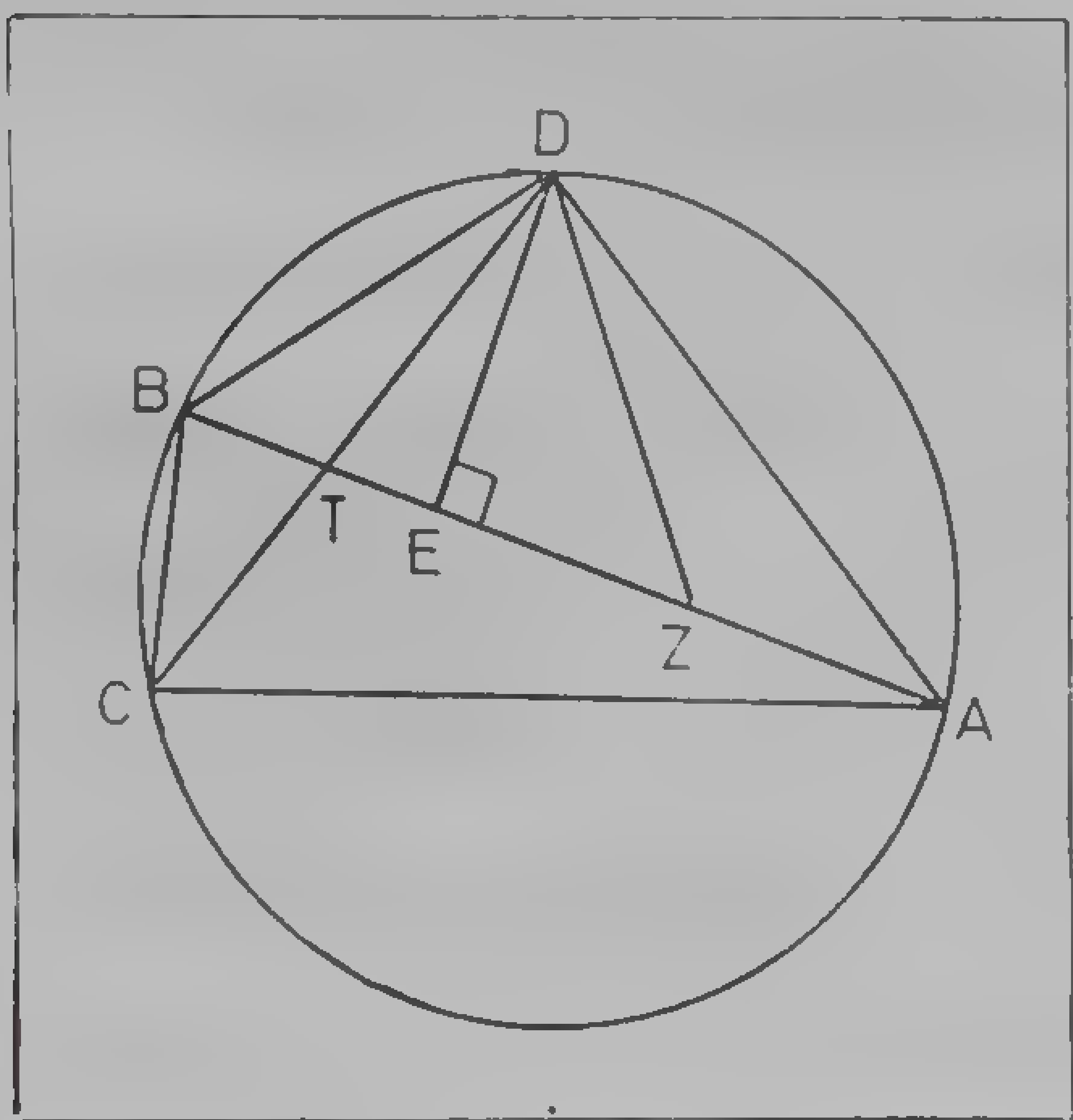
$$s.ADT - s.CBT = s.DBZ = DE \times EB$$

واین همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت :

(۱)- چد : ص ۴۶ سطرسوم‌به‌بعد (چند غلط چاپی دارد) - چم : ص ۸۵

برهان‌دوم قضیهٔ‌چهارم(۱) - دومین برهان از استادبیرونی.



(شکل۵۴)

مانند برهان‌اول فصل مشترك AB و CD را نقطهٔ T می‌نامیم و روی EA پاره‌خط EZ را مساوی با EB جدا می‌کنیم. واضح است که در این صورت $BD = DZ$ وچون در قضیهٔ‌اول ثابت کرده‌ایم که:

$$EA = EB + BC$$

پس $AZ = BC$ و در نتیجه دو مثلث AZD و CBD (درحالت‌سه‌ضلع) متساویند. و ازروی شکل واضح است که:

$$s.AZD - s.BTC (= s.CBD - s.BTC) = s.DBT$$

(دراین‌تساوی مثلاً s. AZD یعنی مساحت مثلث AZD)

به دوطرف این تساوی مقدار s.DTZ را می‌افزاییم حاصل‌می‌شود:

$$s.AZD + s.DTZ - s.BTC = s.DBT + s.DTZ$$

یعنی:

$$s.ADT - s.BTC = s.DBZ \qquad (1)$$

اما

$$s.DBZ = DE \times EB$$

وازطرف‌دیگر اگر به دو جملهٔ تفاضل طرف چپ تساوی (۱) مقدار s.ATC را بیفزاییم این‌تفاضل تغییر نمی کند وداریم:

$$s.ADT - s.BTC = s.ADC - s.ABC$$

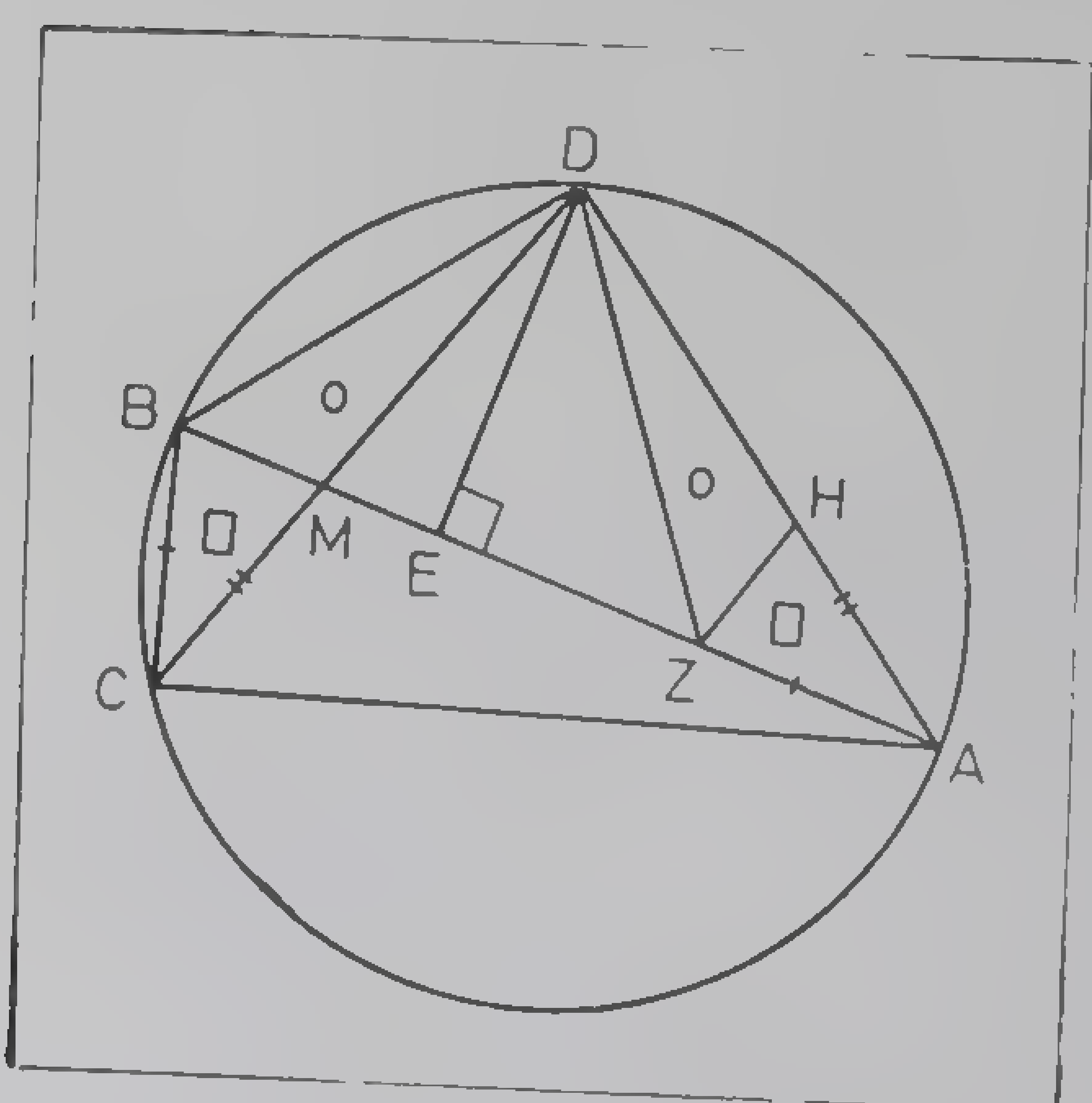
بنابراین تساوی (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$s.ADC - s.ABC = DE \times EB$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت:
(۱)- چد: ص۴۶ شش سطر آخر صفحه - چم: ص۸۶ از سطر ششم به بعد

برهان سوم قضیهٔ چهارم(۱) - سومین برهان از ابونصر جعدی[۲] (= ابو- نصر عراق)



(شکل ۵۵)

فصل مشترك AB و CD را نقطهٔ M می‌نامیم و روی EA پاره‌خط EZ را مساوی با BE و روی AD پـاره خـط AH را مساوی با CM جدا می‌کنیم.

واضـح است که دو مثلث AHZ و CMB باهم و دومثلث DHZ و DMB با هم مساویند و از روی شکل پیداست که:

$$s.BMC + s.BMD + s.DMZ = s.ADM$$

(دراین تساوی مثلاً s.BMC یعنی مساحت مثلث BMC)

به دوطرف این‌تساوی s.AMC را می‌افزاییم:

$$\underbrace{s.AMC + s.BMC}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle s.ABC} + \underbrace{s.BMD + s.DMZ}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle s.BDZ} = \underbrace{s.AMC + s.ADM}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle s.ADC}$$

بنابراین داریم:

$$s.BDZ = s.ADC - s.ABC$$

اما $s.BDZ = DE \times EB$

پس $s.ADC - s.ABC = DE \times EB$

و این‌همان چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به‌برهان سوم قضیهٔ چهارم:

(۱)- این‌برهان درنسخهٔ «عل» جداگانه نیامده ولی‌درضمن برهان شانزدهم قضیهٔ اول ذکر شده است - چد: ص ۴۷ (مغلوط چاپ‌شده) - چم: ص۸۶

(۲)- دربارهٔ ابونصر جعدی رجوع کنید به‌یادداشت شمارهٔ (۳) ذیل برهان دوم قضیهٔ دوم- ازابونصر عراق دوبرهان برای قضیهٔ اول به‌عنوان برهانهای دوازدهم وشانزدهم‌قضیهٔ اول ودوبرهان برای‌قضیهٔ دوم به‌عنوان برهانهای دوم وسوم قضیهٔ دوم ذکرکرده‌ام.

***

برهان دیگری برای قضیهٔ چهارمـ در کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد (چد: ص۴۷ و ۴۸) برهان ناقصی برای قضیهٔ چهارم از ابوعبدالله الشنّی ذکر شده و در نسخهٔ چاپ مصر همان کتاب (چم: ص۸۷ به بعد) از روی نسخهٔ خطی دیگری اصلاح شده‌است. همین برهان ابوعبدالله الشنّی در نسخهٔ خطی «عل» در جزو برهانهای قضیهٔ اول آمده ولی مخدوش و ناقص است و سوتر به‌وجهی آن را تصحیح کرده‌است (عل: ص۹۸و۹۹ ـ سوتر A: ص۲۰ وصفحات ۶۷و۶۸) ـ چون این برهان مفصل و متن عربی آن ناقص است از ذکر آن صرف نظر می کنم. ـ از ابوعبدالله الشنّی برهانهای سیزدهم و پانزدهم قضیهٔ اول و برهان پنجم قضیهٔ دوم را قبلاً ذکر کرده‌ام. و نیز رجوع کنید به تبصرهٔ (۲) ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم.

ط ـ تبصره‌ای دربارهٔ قضایای چهارگانهٔ مذکور

استاد بیرونی درچند موردخاطر نشان کرده است که می توان برهان بعضی از این چهار قضیه را مقدم قرارداد و بعد بااستفاده از آن قضایای دیگر را ثابت کرد. مثلا در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد: ص۴۸ ـ چم ۸۹) آمده است: «وهذه الخواص مشتبکه بعضها ببعض تصح احداهما من صحة الاخری» و در همان نسخه‌ها (چد: ص۴۲ ـ چم: ص۸۲) دربأره قضایای دوم و سوم آمده است: «وهاتان الخاصیتان تشتبکان حتی تصح احداهما الاخری وتصح بنفسها منفرده).

خود استاد درنسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد: ۴۴ و ۴۵ ـ چم: ص۸۲تا۸۵) این عمل را دربارهٔ قضایای دوم و سوم انجام داده‌است.

همچنین در نسخهٔ خطی «عل» (ص۸) ابتدا قضیهٔ دوم ثابت شده و بعداً قضیهٔ اول از آن نتیجه گرفته شده‌است (رجوع کنید به تبصرهٔ ۲ ذیل برهان پنجم قضیهٔ دوم)ـ همچنین در بسیاری از برهانهای قضایای دوم و سوم و چهارم از قضیهٔ اول استفاده شده است. برای احتراز از طولانی شدن کلام از ذکر این موارد خودداری می کنم.

بخش چهارم

مسائل کتاب استخراج‌الاوتار

الف ـ مقدمه

پس از بیان واثبات چهار قضیهٔ مذکور دربخش قبل استاد روی هم‌رفته سی مسئلهٔ مختلف را با استفاده ازآن قضایا حـل کرده است که در این بخش به ذکر آنها می‌پردازم.

در نسخهٔ خطی «عل» (که درآن فقط دو قضیه ازقضایای مذکور جداگانه مطرح وثابت شده) درآغازاین مسائل‌آمده است (عل: ص۱۸):

« ولقد حل هذان الشکلان من‌الاصول الهندسیة محلاً جلیلاً ..»

امادرنسخه‌های چاپی «استخراج‌الاوتار» (که‌درآنها هرچهارقضیه جداگانه مطرح وثابت شده) درآغازاین مسائل چنین‌آمده است (چد: ص۴۹ـ چم ص۹۰):

« و هذه‌الخواص التی قدمناها معدودة من‌الاصول الهندسیة، ولذلك رجعت الیها فی‌مطلوبات کثیرة خرجت بها ، وانا اذکرعدة عن‌ذلك، ومتی‌اتفق‌لغیری منها

شیء نسبته الیه وسمیته باذن الله تعالی وعونه»

حاصل و خلاصهٔ هردو عبارت مذکور این است که:

«قضایایی که قبلا ذکر کردیم معدودی از خواص اصلی هندسه هستند و در حل بسیاری از مسائل می‌توان از آنها استفاده کرد که اینك بذکر عده‌ای از آنها می‌پردازم و راه حلهایی که از خود من نیست بنام صاحبانشان ثبت می کنم.»

تبصره – این سی‌مسئله را می‌توان به دو دستهٔ متمایز تقسیم کرد.

دستهٔ اول (مشتمل بر ۱۵ مسئله):

پنج مسئلهٔ اول مسائل مربوط به ترسیم مثلث به وسیلهٔ ستاره و پرگار است.

مسئلهٔ ششم مربوط به محاسبهٔ پاره خطهایی است که پای یك ارتفاع مثلث روی قاعدهٔ نظیر آن پدید می‌آورد.

مسئلهٔ هفتم برهان درستی دستور محاسبهٔ مساحت مثلث برحسب اضلاع آن است.

مسئلهٔ هشتم برهان درستی دستور محاسبهٔ مساحت چهار ضلعی محاطی برحسب اضلاع آن است.

مسائل نهم و دهم مسائلی هستند که در کتابهای جبر قدیمی ذکر شده است.

مسائل یازدهم و دوازدهم و سیزدهم و چهاردهم و پانزدهم مسائلی هستند که درهیئت و نجوم به‌کار می‌روند.

دستهٔ دوم (مشتمل بر ۱۵ مسأله):

مسائل شانزدهم تا سی‌ام مربوط به محاسبهٔ اوتار دایره هستند.

ب ـ مسائل هندسی و جبری و نجومی

مسئلهٔ اول (۱) ـ ترسیم دو خط راست که از دو نقطهٔ معلوم A و C بگذرند ویکدیگررا درنقطه‌ای‌مانند B قطع کنند به‌قسمی‌که زاویهٔ ABC مساوی بـازاویهٔ معلوم α و مجموع AB + BC مساوی بـا طول معلوم l باشد (۲).

(صورت این مسئله را بدو وجه زیر نیز می‌توان بیان کرد:

الف ـ دو نقطهٔ A و C و زاویهٔ α و پاره خط TH به طول l مفروض است. می‌خواهیم نقطه‌ای مانند B بیابیم به‌قسمی که پاره خط AC ازآن نقطه به زاویهٔ α دیده شود و مجموع دو پاره خط AB و BC مساوی با l باشد.

ب ـ ازمثلث ABC زاویـهٔ B وضلع AC و مجموع دو ضلع دیگر معلوم است. آن‌مثلث را رسم کنید(۳)).

استاد تاریخچهٔ این مسئله را چنین‌شرح داده‌است:

> « **مانالاوس**(۴) درشکل(= قضیه‌یامسئله) دوم از مقالهٔ سوم‌کتاب خود موسوم به«الاصول‌الهندسیة(۵)»خواسته‌بود معلوم‌کندکه‌چگونه ممکن است درنیمدایرهٔ معلومی خط شکسته‌ای (دوضلعی) محاط کردکه طول آن مساوی باپاره خط معلومی باشد. و درحل‌این مسئله راهی بس‌طولانی پیش گرفته‌بود. سپس **ثابت‌بن‌قره**(۶)درضمن تفسیرآن‌کتاب (= اصول‌الهندسیة) راهی‌رفت‌که به‌همان‌اندازه طولانی‌بود.

اما با درنظر گرفتن آنچه قبلا، دربارهٔ خط شکسته‌ای که دریك کمان دلخواه ازدایره محاط باشد ، گفتیم(۷) نه تنها حل مسئله‌ای که **مانالاوس** طرح کرده آسان است بلکه می‌توان‌آن را به‌هر کمانی از دایره (و نه فقط نیم دایره) تعمیم داد »

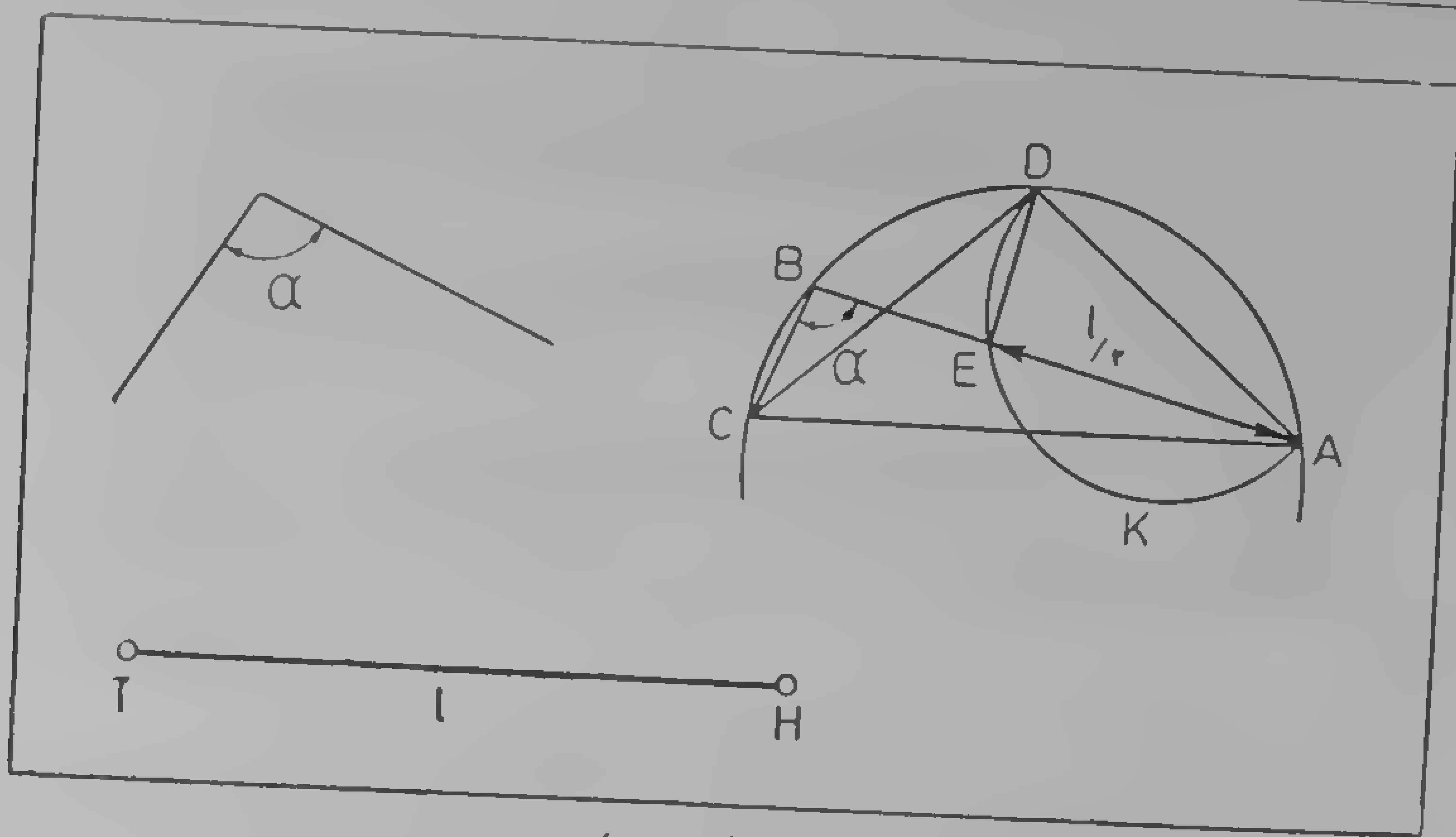
«سپس **ابوالجود محمدبن‌لیث**(۸) که خدایش بیامرزادمقاله‌ای را به حل‌این مسئله اختصاص داد وآن را به‌وجهی بسیارطولانی ومشکل حل‌کرد . تا اینکه **ابوسعیداحمدبن‌محمدبن‌عبدالجلیل‌سجزی**(۹) ازاین‌مسئله آگاهی یافت وبرای‌آن راه‌حلی که بی‌اندازه‌آسان است پیداکرد. راهی راکه ما برای حل این‌مسئله با استفاده ازخاصیت خط شکستهٔ محاط در کمان‌دایره، که به‌وسیلهٔ پای‌عمودی که ازوسط‌آن‌کمان برآن‌خط فرودآید نصف می‌شود، یافته‌ایم زیاد ازراه حل او (= سجزی) دورنیست.»

راه‌حل مسئلهٔ اول ازاستاد(۱۰)ــ نقاط A و C رابه هم‌وصل کرده کمان درخورزاویهٔ α نظیرپاره خط AC رارسم می کنیم(۱۱) ووسط آن کمان رانقطهٔD می‌نامیم‌و D را به A وصل می کنیم . باید طول مفروض l از طول AC بزرگتر باشد ولی از ۲AD بزرگتر نباشد(۱۲) تا حل مسئله ممکن باشد.

سپس به قطر AD نیمدایرهٔ AKD را (مطابق باشکل) رسم کرده‌در آن‌وتر AEرا مساوی با نصف‌طول‌معلوم l می کشیم‌و آن‌را امتداد می‌دهیم تا کمان درخور مذکور رادرنقطه‌ای مانند B قطع کند و B را به C وصل کرده می گوییم:

$$\widehat{ABC}=\alpha \quad \text{و} \quad AB+BC=l$$

(یعنی در واقع خطهای AB و BC جواب مسئله‌اند)



(شکل۵۶)

برهان - پاره خط DE را رسم می کنیم. واضح است که DE برAB عمود است . وچون این عمود از وسط کمان ADC فرودآمده است (بنا برقضیهٔ اول)

داریم:

$$AE = EB + BC$$

اما داشتیم :

$$AE = \frac{۱}{۲}\, l$$

پس :

$$EB + BC = \frac{۱}{۲} l$$

و (از جمع کردن دو تساوی اخیرعضو به‌عضوحاصل‌می‌شود):

$$(AE + EB) + BC = \boxed{AB + BC = l}$$

از طرف دیگر زاویهٔ ABC مساوی با زاویهٔ α است زیـرا نقطهٔ B روی کمان درخور زاویهٔ α واقع است.

و این همان‌چیزی‌است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت‌های مربوط به‌مسئلهٔ اول :

(۱)- عل : ص۱۸- سوتر A : ص۳۱ و ص ۶۹ - چد: ص ۴۹- چم : ص ۹۰

(۲)- این مسئله‌در نسخهٔ «عل» چنین بیان شده است: «اخراج خطین من نقطتین مفروضتین تحیطان بزاویة مفروضة و تساوی مجموعها خطاً مفروضاً لی»

(۳)- راه حل دیگری ازاین مسئله را درکتاب «حل‌المسائل‌هندسه» (تألیف صفاری - قربانی) جلداول صفحهٔ ۱۱۸ شمارهٔ ۲۳۳ خواهید یافت.

(۴)- Menelaus (= منلاوس)- در منابع دورهٔ اسلامی نام‌وی را به صورتهای « مانالاوس » و « مناولاس » وغیره نیزثبت کرده‌اند-درنسخهٔ « عل : ص ۱۸» در سه مورد به جای « مانالاوس » به‌غلط « مالاناوس » نوشته شده است.

- برای‌کسب اطلاع دربارهٔ‌آثار منلاوس رجوع کنید به «هیث H» ج۲ ص۲۶۰ به‌بعد.

(۵)- ابن ندیم درکتاب « الفهرست » ازکتاب « الاصول الهندسیة» تألیف مانالاوس نام برده ونوشته‌است که ثابت‌بن‌قره‌آن را به‌سه‌مقاله‌درآورد (← ترجمهٔ فارسی « الفهرست» ص۴۸۲) و هیث‌درکتاب « تاریخ‌ریاضیات یونانی » به‌این مطلب اشاره‌کرده است (←«هیث H، ج۲ :ص۲۶۰)

(۶) - رجوع‌کنید به « بیرونی‌نامه » ص ۵۳۵

(۷)- مقصود قضیهٔ اول است .

(۸)- رجوع کنید به«بیرونی نامه»:ص۵۲۴ یا به «ریاضیدانان‌ایرانی» ص ۲۱۴ تا ۲۲۰

(۹) رجوع کنید «به‌بیرونی‌نامه»: ص۵۲۷ یا به «ریاضیدانان‌ایرانی» صفحات ۲۵۰ تا ۲۶۸

(۱۰)- استاد خود در پایان صورت مسئلهٔ اول، درنسخهٔ «عل»، اضافه کرده‌است : «لی» یعنی «ازمن»

(۱۱) - رجوع کنید به « نه مقالهٔ هندسه » ، مقالهٔ دوم: ص۸۹ (کمان‌در خوریك زاویه) .

(۱۲) - درنسخهٔ «عل» (ص۱۸سطر پنجم‌ازآخر) به‌جای «لیس‌باعظم من ضعف اد » اشتباهاً نوشته شده است : «لیس باعظم من ضعف مربع‌اد »

مسئلهٔ دوم (۱) - ترسیم دوخط راست که از دو نقطهٔ معلوم A و C بگذرند و یکدیگر را در نقطه‌ای مانند B قطع کنند به قسمی که زاویهٔ ABC مساوی با زاویهٔ معلوم α و (قدرمطلق) تفاضل AB - BC مساوی با طول معلوم l باشد(۲).

(صورت این مسئله را به دو وجه زیر می‌توان بیان کرد:)

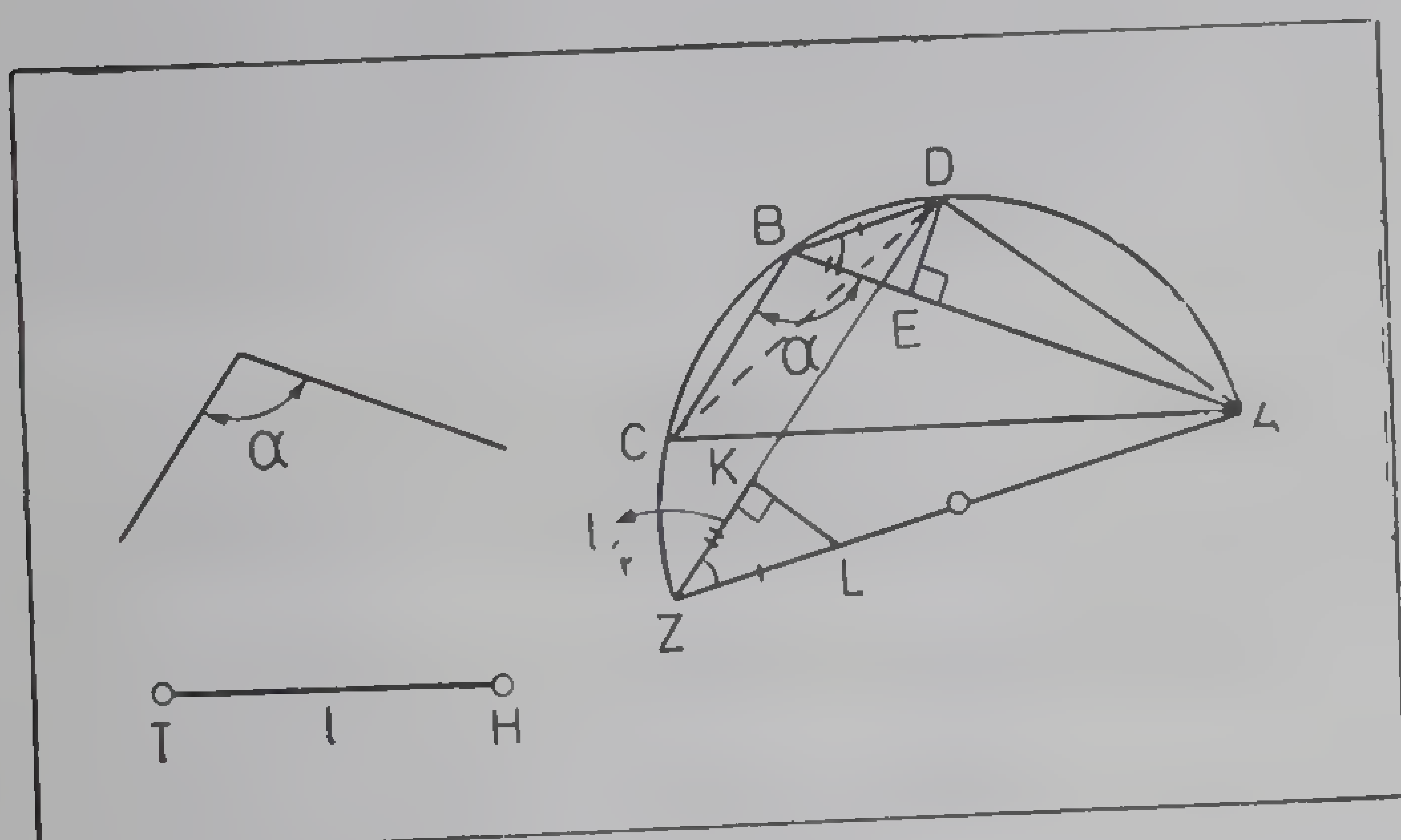
الف- درنقطهٔ A و C و زاویهٔ α و پاره خط TH به طول l مفروض است می‌خواهیم نقطه‌ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره‌خط AC از آن‌نقطه به زاویهٔ α دیده شود و قدرمطلق تفاضل دوپاره خط AB و BC مساوی با l باشد .

ب - ازمثلث ABC زاویهٔ B و ضلع AC و «تفاضل دوضلع دیگر معلوم است. آن مثلث را رسم کنید.(۳))

راه حل اول مسئلهٔ دوم از استاد(۴)- نقاط A و C را به هم‌وصل کرده کمان درخور زاویهٔ α نظیر پاره‌خط AC را رسم می کنیم(۵) و وسط آن کمان را نقطهٔ D می‌نامیم و کمان ADC را تا نیمدایره کامل می کنیم تا نقطهٔ Z بدست آید(۶). و پاره خطهای AD و DZ و AZ (= قطر دایره) را رسم می کنیم.

سپس روی ZD ابتدا از Z پاره خط ZK را مساوی با نصف طول مفروض l جدا می کنیم ($ZK = \frac{l}{۲}$) و از نقطهٔ K عمود KL را بر ZA اخراج می‌نماییم (نقطهٔ L روی ZA واقع‌است). آن‌گاه وتر DB را مساوی با ZL اختیار کرده (نقطهٔ B باید روی کمان DC واقع‌شود) ونقطهٔ B را به‌نقاط A وC وصل‌می کنیم.

می گوییم دراین‌صورت $AB - BC = l$. (و $\hat{ABC} = \alpha$) . یعنی در واقع AB و AC جواب مسئله‌اند) .



(شکل ۵۷)

برهان - از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم. دو مثلث DEB و LKZ در رأسهای E و K قائم‌الزاویه هستند. و دو زاویهٔ DBE و DZA که هر دو محاطی و روبه‌روی کمان AD هستند متساویند. و از طرف دیگر وتر BD را مساوی با ZL اختیار کردیم. پس این دو مثلث در حالت وتر و یك زاویهٔ حاده متساویند (۷). بنابراین BE = ZK و چون $ZK = \frac{l}{۲}$ پس $BE = \frac{l}{۲}$

امـا نظر به قضیهٔ اول نقطهٔ E وسط خط شکستهٔ ABC است و داریـم[۸] :

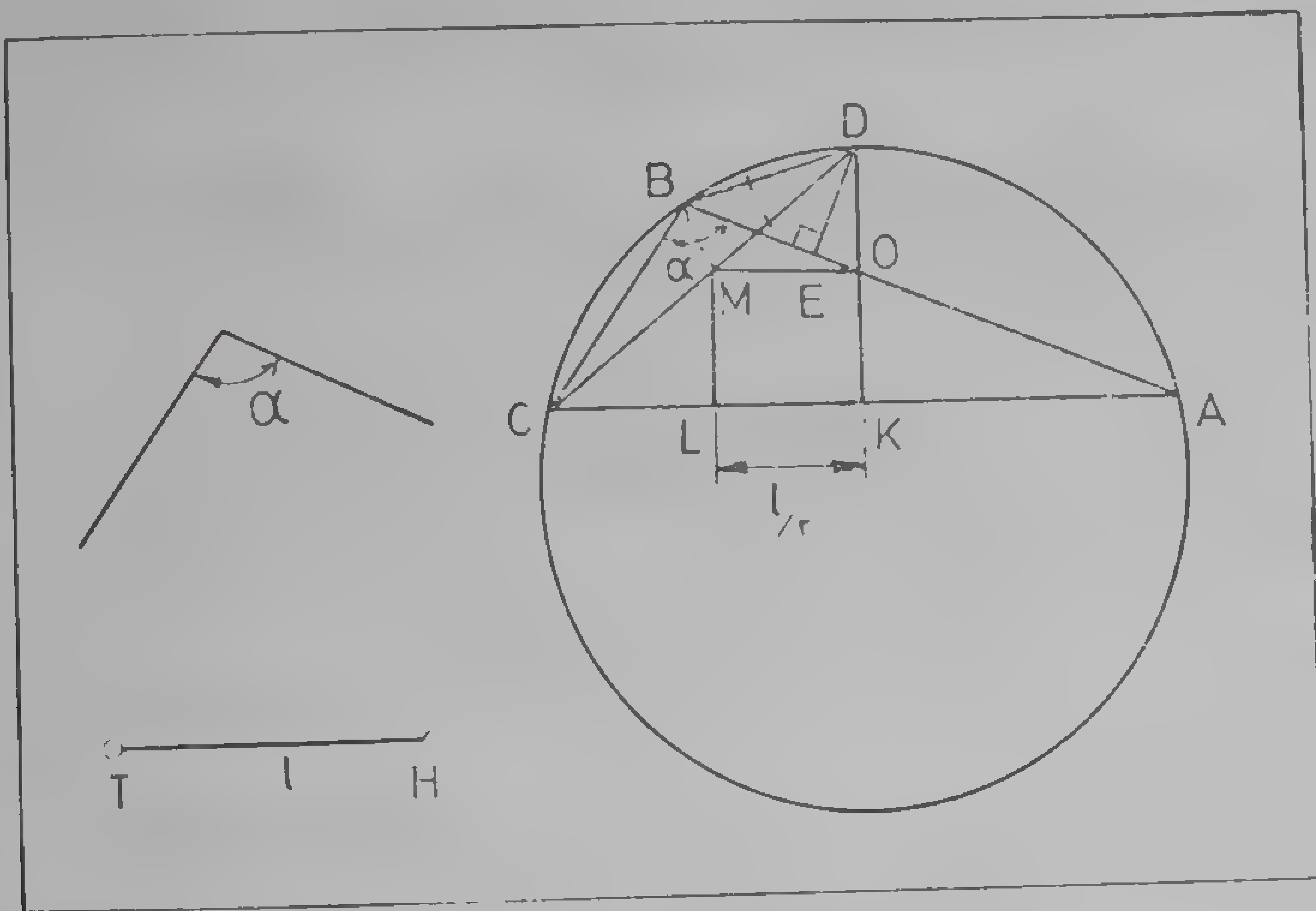
$$BE = \frac{AB - BC}{۲} \qquad \text{پس :} \qquad AB - BC = ۲BE = l$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(تساوی زاویهٔ ABC با α واضح است . زیرا نقطهٔ B روی کمان در خور زاویهٔ α واقع است) .

شرط امکان مسئله ـ شرط امکان مسئله این است کـه LZ از AD (= CD) کوچکتر نباشد[۹]. (زیرا اگر LZ از CD بزرگتر بـاشد وقتی وتر DB را مساوی با ZL رسم کنیم نقطهٔ B در خارج کمان BD واقع خواهد شد) .

راه حل دوم مسئلهٔ دوم از استاد[۱۰] ـ نقاط A و C را بـه هم وصل کرده کمان درخور زاویهٔ α نظیر پاره خط AC را رسم مـی کنیم و وسط آن را نقطهٔ D می‌نامیم و D را به C وصل می کنیم واز نقطهٔ D عمود DK را بر AC فرود می‌آوریم و (مطابق باشکل) پاره خط KL را روی AC مساوی با $\frac{l}{۲}$ جـدا می کنیم و از نقطهٔ L خط LM را به موازات DK و از نقطهٔ M (کـه بر DC واقع‌است) MO را به موازات KL رسم می کنیم (نقطهٔ O روی DK واقع‌است). سپس وتر DB را مساوی با DM اختیار کرده (نقطهٔ B بـاید روی کمان DC واقع شود) و پاره خط های AB و BC را رسم مـی کنیم[۱۱] . (خطهای AB و BC جواب مسئله‌اند) .



(شکل ۵۸)

برهان - از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرودمی آوریم واضح است که دو مثلث DBE و DCK متشابه‌اند. زیرا دو زاویهٔ DBE و DCK هر دو محاطی و روبه روی کمان AD واقع‌اند و هریك از دو زاویهٔ DEB و DKC قائمه‌اند. و چون MO با CK موازی است مثلث DMO نیز با مثلث DBE متشابه است.

اما DM = DB پس دو مثلث DMO و DBE متساویند (۱۲).

بنابراین MO = BE. اما MO = KL پس $BE = KL = \frac{l}{۲}$.

از طرف دیگر BE مساوی با نصف AB − CB است(۸) پس:

۲BE = AB − BC و بنابراین: AB − BC = l

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ دوم :

(۱) ـ عل ۱۹ : سوتر A : ص ۳۳ و صفحهٔ ۶۹ ـ چد : ص۵۱ ـ چم : ص۹۲ .

(۲)ـ این‌مسئله درنسخهٔ «عل» چنین بیان‌شده‌است: « اخراج خطین من نقطتین مفروضتین یحیطان‌بزاویة مفروضه‌ویکون فضل‌احد هماعلی‌الاخر مساویالخط مفروض‌لی» .

(۳)ـ راه حل دیگری‌ازاین مسئله را درکتاب « حل‌المسائل هندسه» (تألیف صفاری ـ قربانی) جلداول صفحهٔ۱۱۹ شماره ۲۳۴ خواهید یافت .

(۴)ـ استاد خود به صراحت ادعاکرده است‌که این‌راه‌حل ازاوست. چه درآخرصورت مسئله چنانکه در یادداشت شمارهٔ (۲) دیده می‌شودآورده است: «... لخط مفروض‌لی» (یعنی‌ازمن) .

(۵)ـ رجوع‌کنید به‌کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه» ، مقالهٔدوم، صفحهٔ ۸۹ (کمان درخوریك زاویه) .

(۶)ـ معلوم نیست چرا استاد برای ترسیم مثلث قائم‌الزاویهٔ ZKL نقطهٔ Z را درامتدادکمان DC گرفته است (به‌قسمی‌که ADCZ نیمدایره باشد) . درصورتی‌که می‌توانست ، همچنانکه در راه حل دوم‌کرده است ، به‌جای‌نقطهٔ Z مثلانقطهٔ C را اختیارکند و ZK را مساوی با $\frac{1}{2}$ روی CD جدا نماید و از K عمودی بر CK اخراج کند تا AC را در نقطهٔ L قطع نماید.

(۷)ـ استاد ابتدا،مطابق با رسم‌قدما، تشابه‌دومثلث DEB وLKZ را نشان‌داده وسپس، ازاینکه درآن دو مثلث BD وZL متساویند تساوی آنها را نتیجه‌گرفته است .

(۸)ـ مطابق با قضیهٔ اول‌داریم : $AE = EB + BC$

چون به دوطرف این‌تساوی مقدار EB را بیفزاییم حاصل می‌شود:

$$AE + EB = ۲EB + BC$$

و یا :

$$AB = ۲EB + BC$$

و از آنجا:

$$EB = \frac{AB - BC}{۲}$$

(۹)- سوتر شکل مربوط به‌این‌قسمت را مطابق با شکل متن عربی رسم نکرده (←«سوترA» : ص۳۳ شکل۳۱) . وناچار شده است این شرط را تغییر دهد (←سوترA: ذیل صفحهٔ ۳۴). اماشکل متن عربی وشرطی که استاد بیان کرده است درست است .

(۱۰)- این راه‌حل نیز ازاستاد است زیرادرآغازآن (درنسخهٔ: عل) آمده است : «طریق آخرفی ذلك لی» .

(۱۱)- می‌توان ثابت کرد که AB از نقطهٔ O می‌گذرد .

(۱۲)- دراینجا باز مانند آنچه در یادداشت شمارهٔ (۶) گفتیم استاد ابتدا تشابه دو مثلث DMO و DBE را نشان داده و سپس از تساوی MO = BE تساوی دو مثلث مذکور را نتیجه گرفته‌است .

مسئلهٔ سوم (۱) - ترسیم دو خط راست که از دو نقطهٔ معلوم A و C بگذرند ویکدیگر را درنقطه‌ای مانند B قطع کنند به قسمی که زاویهٔ ABC مساوی با زاویهٔ معلوم α وحاصل‌ضرب AB × BC مساوی با مربع طول معلوم k باشد(۲) .

(صورت این‌مسئله را به دووجه زیر نیزمی‌توان بیان کرد :

الف- دو نقطهٔ A و C وزاویهٔ α وپاره‌خطی به‌طول معلوم k مفروض است.

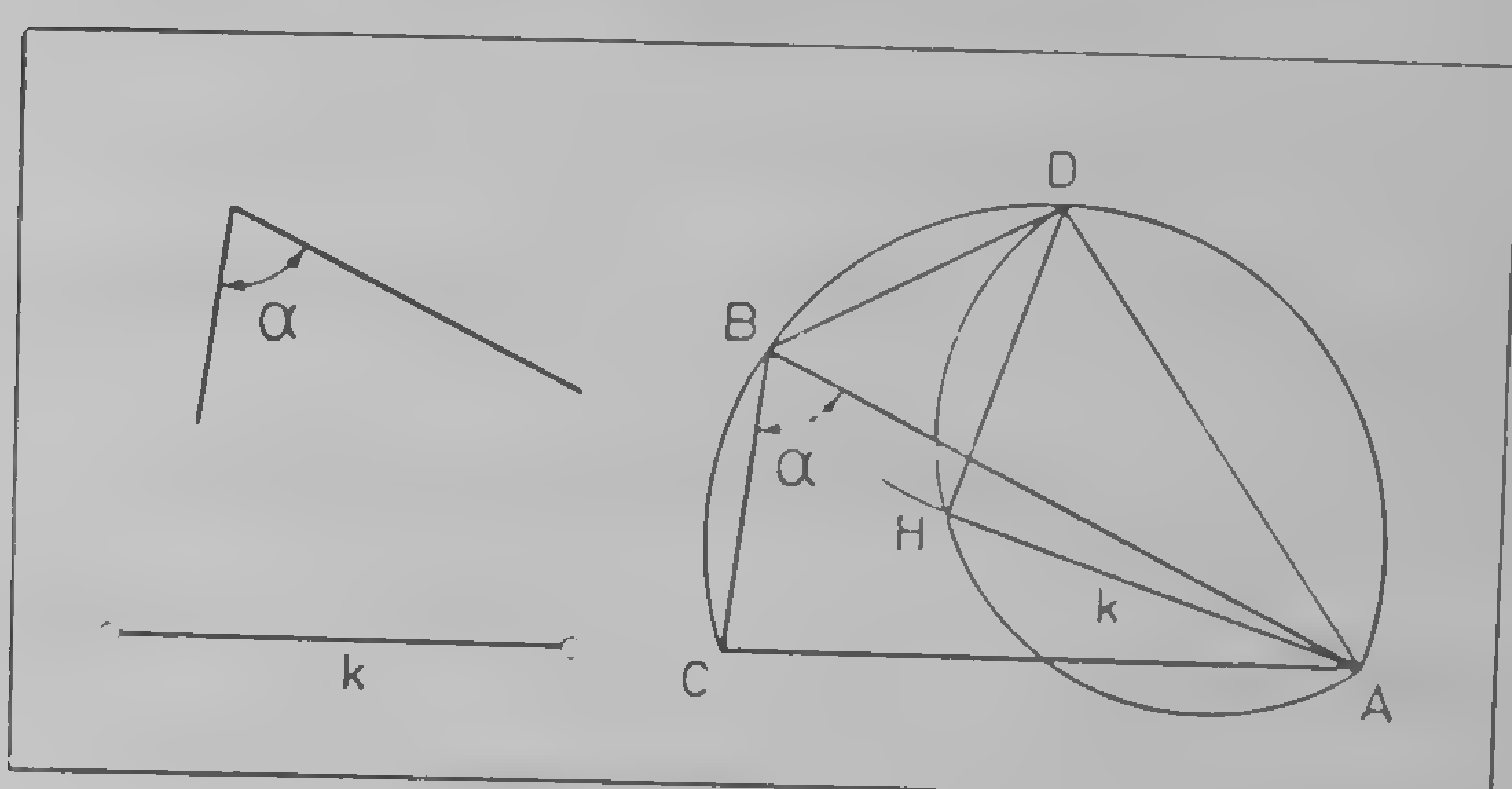
می‌خواهیم نقطه‌ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره‌خط AC از آن نقطه به زاویهٔ α دیده شود و حاصل ضرب $AB \times BC$ مساوی k^2 باشد.

ب ـ ازمثلث ABC زاویهٔ B وضلع AC وحاصل ضرب دوضلع دیگر معلوم است. آن مثلث را رسم کنید(۳).

راه حل اول مسئلهٔ سوم از استاد(۴) ـ نقاط A و C را به‌هم وصل کرده کمان درخور زاویهٔ α نظیر پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم(۵) و وسط آن کمان را نقطهٔ D می‌نامیم و D را به A وصل می‌کنیم. سپس به‌قطر AD نیمدایره‌ای (مطابق باشکل) رسم کرده در آن وتر AH را مساوی با طول k می کشیم(۶) ونقاط D و H را به‌هم وصل می کنیم. آنگاه در کمان درخور مرسوم وتر DB را مساوی با DH اختیار کرده پاره خطهای AB و BC را رسم می کنیم و می گوییم:

$$AB \times BC = k^2$$

(و $\widehat{ABC} = \alpha$ یعنی در واقع AB و BC جواب مسئله‌اند).



(شکل ۵۹)

برهان - نظر به‌قضیهٔ دوم داریم :

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + AB \times BC$$

بنابراین : $\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC$ (۱)

اما (در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH) :

$$\overline{AD}^2 - \overline{DH}^2 = \overline{AH}^2$$

و چون $DH = BD$ پس :

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AH}^2 \quad (۲)$$

از دوتساوی (۱) و (۲) حاصل می‌شود :

$$\overline{AH}^2 = AB \times BC$$

و چون $AH = k$ پس : $AB \times BC = k^2$

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

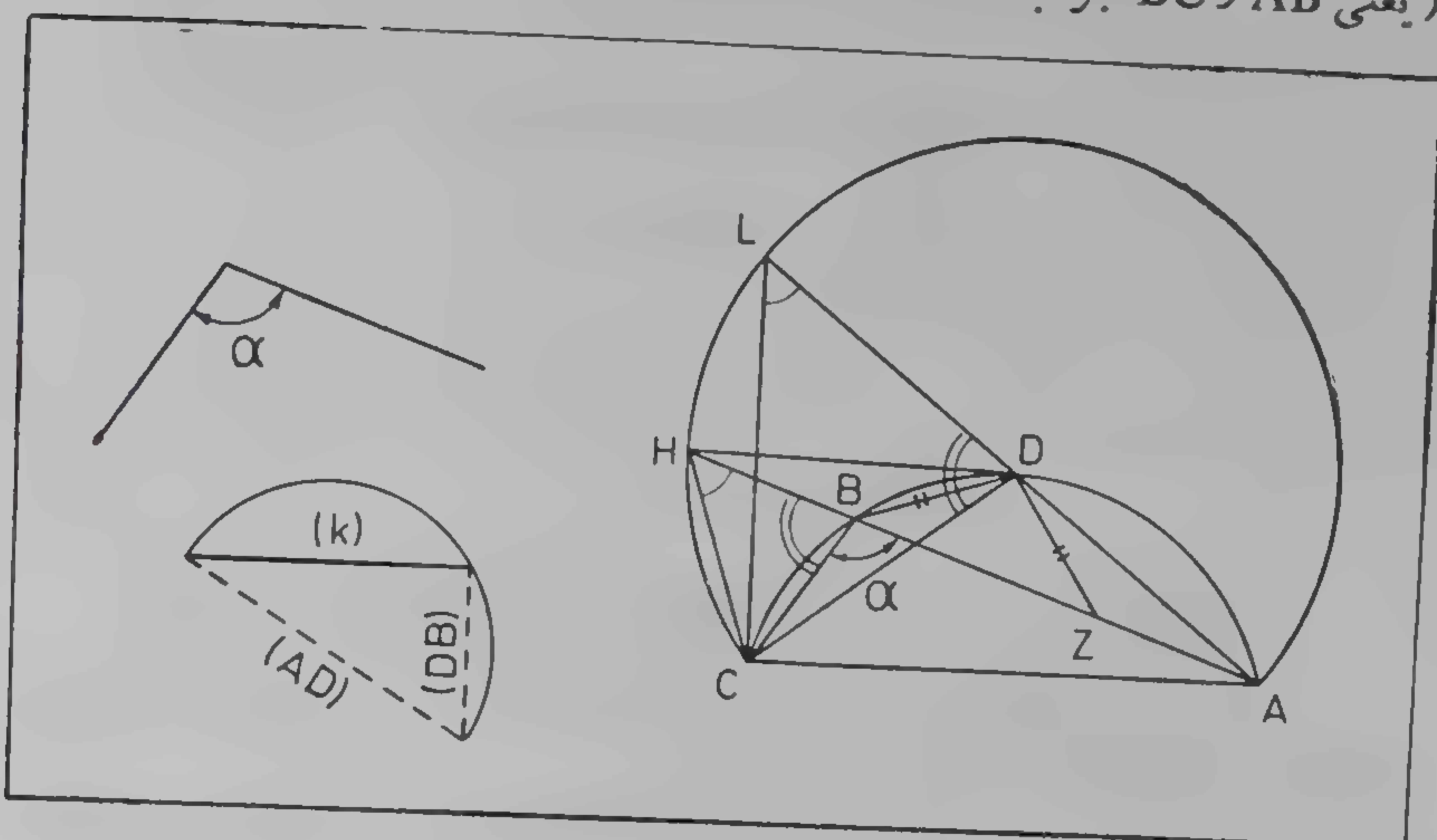
(یکی دیگر از شرایط مسئله این بود که زاویهٔ ABC مساوی با α باشد. چون نقطهٔ B روی کمان درخورزاویهٔ α واقع است این شرط نیز برقرارمی‌باشد) .

راه حل دوم مسئلهٔ سوم ازابوعبداله شنّی(۷)**ـ** (استادنوشته است که این‌راه‌حل‌شبیه‌راه اول‌است).

نقاط A و C را به‌هم وصل کرده کمان‌درخور زاویهٔ α نظیر پاره خط AC را رسم مـی کنیم ونقطهٔ A را به وسط کمان $\widehat{AC}$ که‌آن را D مـی‌نامیم وصل

می‌نماییم و فرض می کنیم که k از AD کوچکتر باشد و گرنه حل مسئله ممکن نخواهد بود .

سپس وتر DB را قسمی رسم می کنیم که $\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 - k^2$ باشد و نقطهٔ B را به نقاط A و C وصل می کنیم و مـی گوییم $AB \times BC = k^2$ (یعنی AB و BC جواب مسئله‌اند).



(شکل ۶۰)

برهان - به مرکز D و به شعاع AD دایرهٔ ALHC را رسم می کنیم و پاره خطهای AD وAB را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ مـرسوم را در نقاط L و H قطع کنند و DH را رسم می کنیم . واضح است که DH = AD . سپس DZ را (مطابق باشکل) مساوی با DB رسم می کنیم. واضح است که AZ = BH و زاویهٔ AZD منفرجه است . بنا بر این درمثلث منفرج‌الزاویهٔ AZD داریم :

$$\overline{AD}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{DZ}^2 + AZ \times ZB$$

(زیرا ZB مساوی بادو برابر تصویر DZ روی امتداد ضلع AZ است[۸]).

و این تساوی را می‌توان چنین نوشت :

$$\overline{AD}^2 = \overline{DZ}^2 + AZ(AZ + ZB) = \overline{DZ}^2 + AZ \times AB$$

و چون $DZ = BD$ و $AZ = BH$

پس داریم : $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + BH \times AB$

و چون از ابتدا وتر BD را به قسمی ساختیم کـه :

$$\overline{AD}^2 - k^2 = \overline{BD}^2$$

پس تساوی اخیر به صورت زیر در مـی‌آید:

$$k^2 = AB \,.\, BH$$

سپس پاره‌خطهای CH و CL و CD را رسم می کنیم. زاویهٔ ADC مساوی با زاویهٔ ABC است . زیرا هردو محاطی و روبه‌روی یك کمان هستند . بنابراین (مکملهای آنهایعنی) دوزاویهٔ LDC و HBC نیز با هم مساویند . وچون دوزاویهٔ ALC و AHC در دایرهٔ بزرگتر محاطی و روبه‌روی یك کمان هستند متساویند . پس دومثلث LDC و HBC متشابه‌اند[۹] . اما مثلث LDC متساوی‌الساقین است پس مثلث HBC نیزمتساوی الساقین مـی‌باشد و داریم : $BH = BC$

پس تساوی $k^2 = AB \,.\, BH$ به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$AB \times BC = k^2$$

واین همان‌چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(تساوی زاویهٔ ABC با α واضح است . زیرا نقطهٔ B روی کمان درخور زاویهٔ α واقع است) .

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ سوم :

(۱)- عل: ص۲۰- سوتر A: ص۳۴- چد:ص۵۳- چم: ص۹۵.

(۲)- صورت این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین بیان‌شده است: «اخراج خطین من نقطتین مفروضتین تحیطان بزاویة یکون ضرب احد هما فی الآخر مساویاً لسطح مفروض لی» .

استاد سطح مفروض را مربع مستطیلی فرض کرده و سپس در ضمن حل مسئله پاره‌خط به‌طول k را طوری اختیارکرده است که مربع آن مساوی با مساحت مستطیل مفروض باشد. به این دلیل است که «مساویاً لسطح مفروض» را « مساوی با مربع طول معلوم k » ترجمه کرده‌ام .

اگر ابعاد مستطیل مفروض را a و b بنامیم طول k واسطهٔ هندسی بین a و b خواهد بود و ترسیم k آسان است. (رجوع کنید به کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه»، مقالهٔ سوم صفحهٔ ۱۴۹ شمارهٔ ۳۲۷).

(۳)- این مسئله را به‌وجه زیر نیز می‌توان حل کرد:

رأس B روی کمان درخور زاویهٔ معلوم B نظیر پاره‌خط AC واقع است. بنابراین قطر d دایرهٔ محیطی مثلث معلوم است. ازطرف دیگر حاصل‌ضرب $AB \times BC$ یعنی k^2 مساوی است با حاصل‌ضرب d درارتفاع نظیر رأس B که‌آن را h می‌نامیم . (رجوع کنید به‌کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه» مقالهٔ سوم صفحهٔ ۱۷۰ شمارهٔ ۲۹۹) پس $h = \frac{k^2}{d}$ یعنی ارتفاع نظیر رأس B نیز معلوم است . بنابراین ازمثلث ABC زاویهٔ B وضلع AC وارتفاع نظیر رأس B دردست است ومی‌توان آن‌را ساخت. رجوع کنید به کتاب «حل المسائل هندسه» (تألیف صفاری ـ قربانی) جلد اول صفحهٔ ۱۱۱ شمارهٔ ۲۲۲ .

(۴)- استاد خود در پایان مسئله (درنسخهٔ «عل») اضافه کرده است: لی (یعنی از من).

(۵)- رجوع کنید به کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه» مقالهٔ دوم صفحهٔ ۸۹ (کمان درخوریك زاویه) .

(۶) - شرط امکان مسئله این است که k کوچکتر از AD باشد . (این شرط را استاد درراه حل‌دوم این‌مسئله از قول ابوعبدالله‌الشنّی ذکر کرده است.)

(۷)- رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» ص۵۳۰

(۸)- رجوع کنید به کتاب «نه‌مقالهٔ هندسه» مقالهٔ سوم، صفحهٔ ۱۷۵ شمارهٔ ۳۰۶ .

(۹)- درنسخهٔ «عل» (ص۲۱ سطر دوازدهم) اسم‌مثلث حب‌ج ازقلم افتاده‌است.

مسئلهٔ چهارم(۱)- ترسیم دوخط راست که ازدونقطهٔ معلوم A و C بگذرند ویکدیگر را درنقطه‌ای مانند B قطع کنند به قسمی که زاویهٔ ABC مساوی بازاویهٔ معلوم α ونسبت $\frac{AB}{BC}$ مساوی با نسبت‌معلوم $\frac{1}{k}$ باشد (۲).

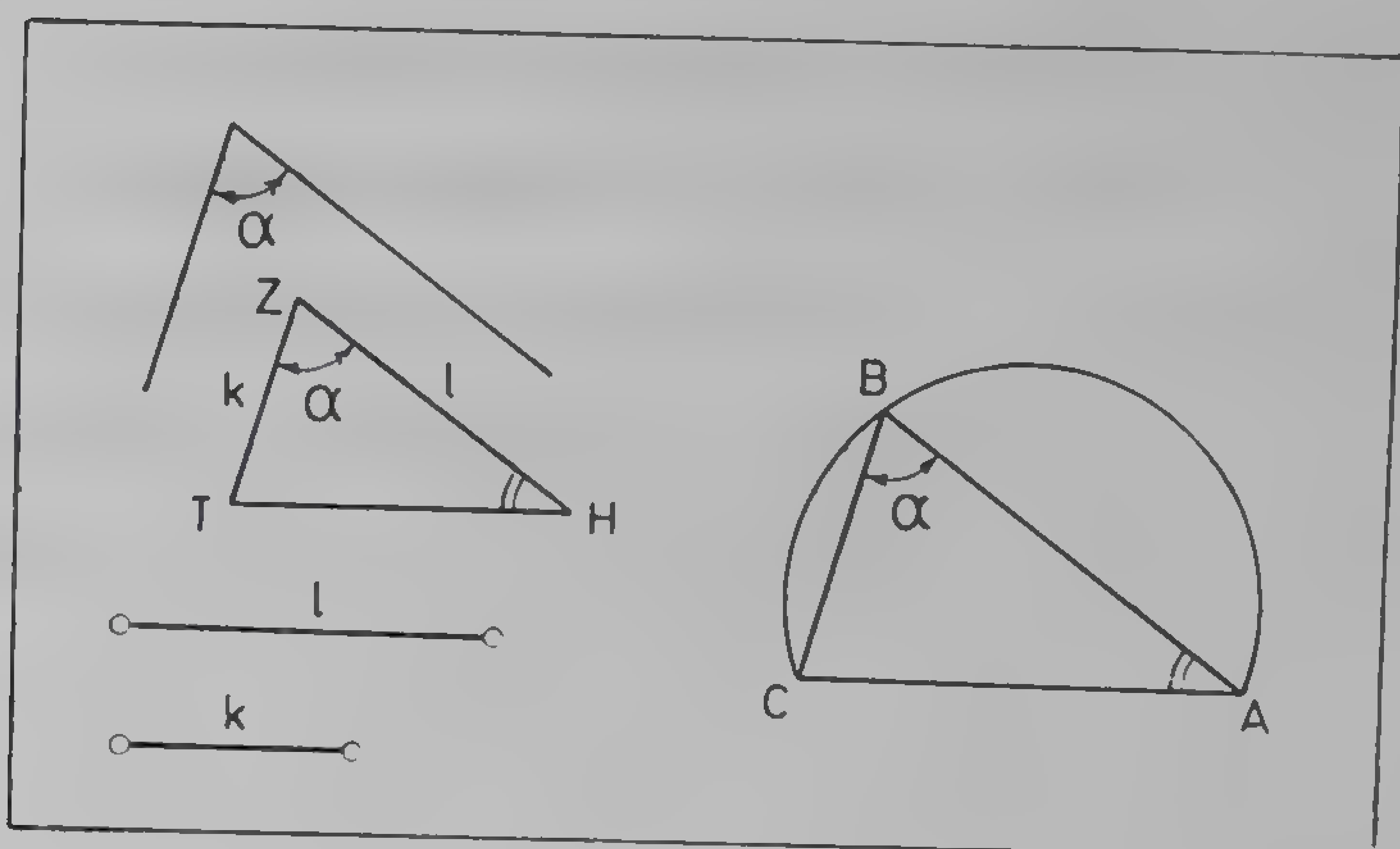
(صورت‌این مسئله را به دو وجه زیر نیزمی‌توان‌بیان کرد:

الف- دونقطهٔ A و C و زاویهٔ α ونسبت $\frac{1}{k}$ مفروض‌است. می‌خواهیم‌نقطه‌ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره‌خط AC ازآن نقطه به‌زاویهٔ α دیده شود و نسبت $\frac{AB}{BC}$ مساوی با $\frac{1}{k}$ باشد .

ب- ازمثلث ABC زاویهٔ B وضلع AC ونسبت دوضلع دیگرمعلوم است.

آن مثلث را رسم کنید(۲)).

راه‌حل- زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ α ساخته رأس آن را Z می‌نامیم و روی دو ضلع آن دو پاره خط ZH و ZT را به‌ترتیب مساوی با l و k جدا و پاره خط TH را رسم می‌کنیم. سپس کمان درخور زاویهٔ α نظیر پاره خط AC را رسم کرده زاویهٔ CAB را مساوی با زاویهٔ THZ مـی‌سازیم و پاره خط BC را رسم می‌کنیم و می‌گوییم مسئله حل شده است (یعنی درواقع خطهای BA و BC جواب مسئله‌اند).



(شکل ۶۱)

برهان- زاویهٔ TZH مساوی با زاویهٔ ABC و زاویهٔ THZ مساوی با زاویهٔ CAB است. بنابراین دو مثلث ABC و HZT متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{HZ}{ZT}=\frac{l}{k}$$

پس خطوط راست BA و BC جواب مسئله‌اند.

تبصره - در پایان حل این مسئله در نسخهٔ خطی «ع‌ل» (صفحهٔ۲۲) عبارات زیر آمده است :

«وهذا الاخیر وان لم یتصل بخواص الخط المنحنی فانی جئت به لینسلق به مما ذکرته من هذه المسائل الی سایر انواعها التی تؤدی الیها القسمة . فلم یکن الغرض فی ذکرها استیفاء جمیعاً حتی اتعرض منها بجمیع ما یحتمله تنویع القسمة . لکنی حکیت منها ما اتفق لی الجواب عنه مستنبطا من خواص تلك الدعاوی المتقدمه کما سیأتی علی جمیع ما اتفق من ذلك لی ولغیری» .

اما در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (چد : ص۵۷ـ چم : ص۱۰۰) عبارات فوق فشرده ومختصر شده به‌صورت زیر آمده است:

« ولم یتصل هذا الاخیر بما نحن فیه من الخواص المتقدمة لکنه لما اتصل بالفن تبعه لینسلق به الی مایتممه اذلم یکن الغرض فی ذکر ماتقدم استیفاء ما تؤدی الیه القسمة فیه و تنویع جنسه ولکنی حکیت ما اتفق فیه جواب مستنبط من الخواص المذکوره » .

برای درك مقصود استاد از این عبارات کافی است ملاحظه کنیم که چهار نخستین مسئله را که شرح آنها گذشت می‌توان یکجا به‌صورت زیر مطرح کرد:

از مثلث ABC ضلع AC و زاویهٔ روبه‌روی آن B ویکی دیگر ازمعلومات زیر در دست است می‌خواهیم آن مثلث را رسم کنیم :

اول : مجموع دو ضلع $AB+BC$

دوم : تفاضل دو ضلع $|AB-BC|$

سوم: حاصل‌ضرب دوضلع $AB \times BC$

چهارم: نسبت دوضلع $\frac{AB}{BC}$

استاد این‌مسئله را درسه‌حالت اول با استفاده از خواص خط شکستهٔ محاط در دایره حل کرده اما راه حلی که برای حالت چهارم ذکر کرده است ربطی به خواص مذکور ندارد.

به این دلیل است که می گوید: اگرچه مسئلهٔ اخیر (= مسئلهٔ چهارم) ربطی به خواص خط شکستهٔ محاط در دایره (= چهار قضیهٔ مذکور در بخش سوم) ندارد ولی چون این مسئله از نوع سه مسئلهٔ اول است آن را در اینجا ذکر می کنیم. (زیرا درسه مسئلهٔ اول یکی از معلومات مجموع یا تفاضل یا حاصل ضرب دوضلع AB و BC است و طبیعی است که یك بار هم این معلوم را نسبت دو ضلع مذکور بگیریم). گذشته از این مقصودم این نبوده است که در اینجا همیشه راه‌حل‌های ممکن مسائل مذکور را ذکر کنم بلکه فقط راه حلهایی که درآنها از خواص خط شکستهٔ محاط در دایره‌استفاده می‌شود ذکر کرده‌ام و در بارهٔ بقیهٔ مسائل نیز، خواه راه‌حل آنها ازمن باشد وخواه‌نباشد، نیز همین‌کاررا کرده‌ام.

یادداشتهای مربوط به‌مسئلهٔ چهارم:

(۱)- عل: ص۲۱- سوترA: ص۳۶- چد: ص ۵۶- چم: ص۹۹

(۲)- صورت این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین بیان شده است:

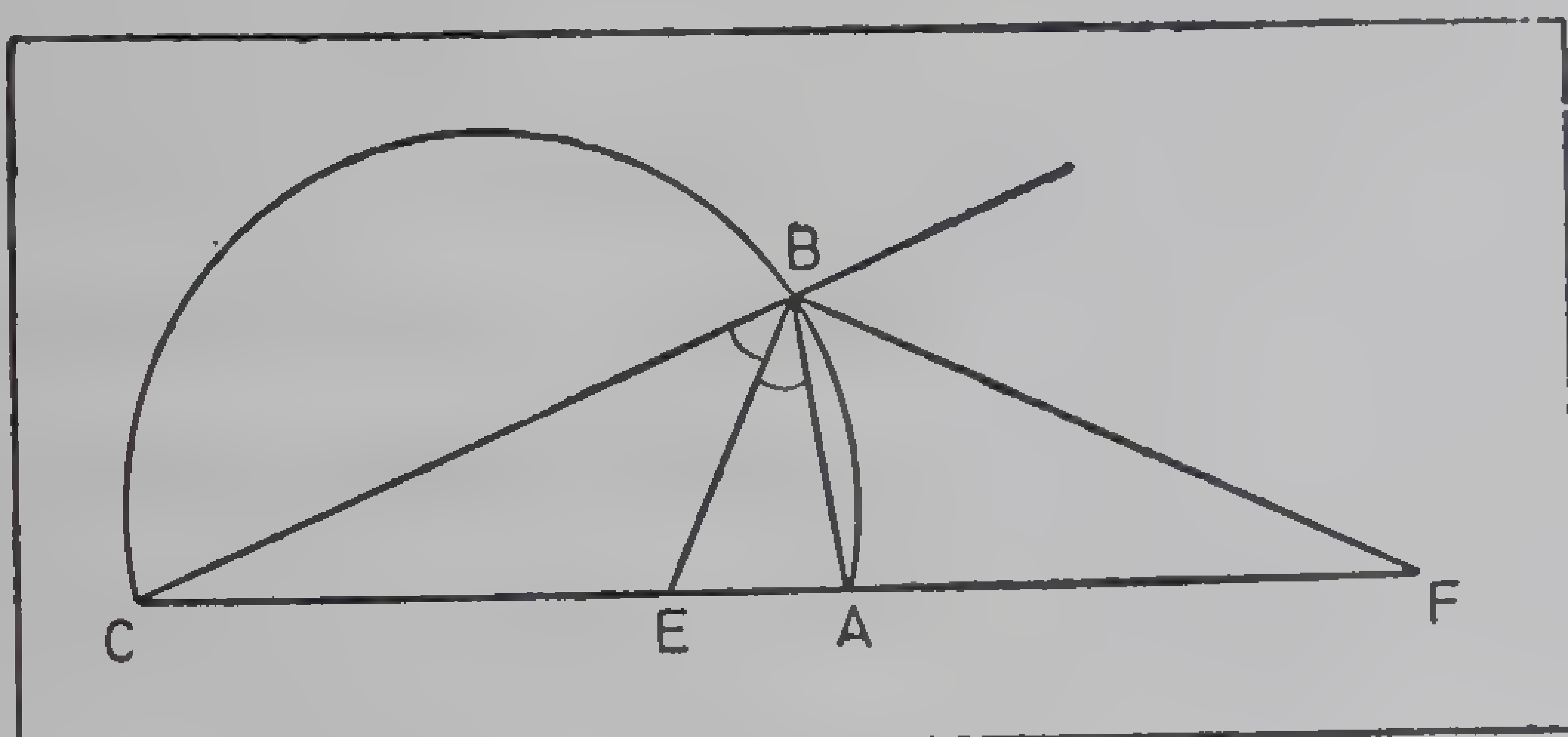
«اخراج خطین من‌نقطتین مفروضتین تحیطان بزاویة مفروضة وتکون نسبة

احد هماالی الاخر کنسبة معلومة» .

(۳)- این مسئله را به‌طریق زیرنیزمی‌توان حل کرد:

چون ضلع AC معلوم است کافی است دومکان هندسی برای رأس B بیابیم . رأس B ازیك‌طرف روی کمان درخورزاویهٔ معلوم B نظیر پاره‌خط BC واقع است. ازطرف دیگراگرمسئله‌راحل‌شده‌فرض کنیم وپاهای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ B را روی ضلع AC نقاط E و F بنامیم می‌دانیم که

$$\frac{EA}{EC}=\frac{FA}{FC}=\frac{BA}{BC}$$

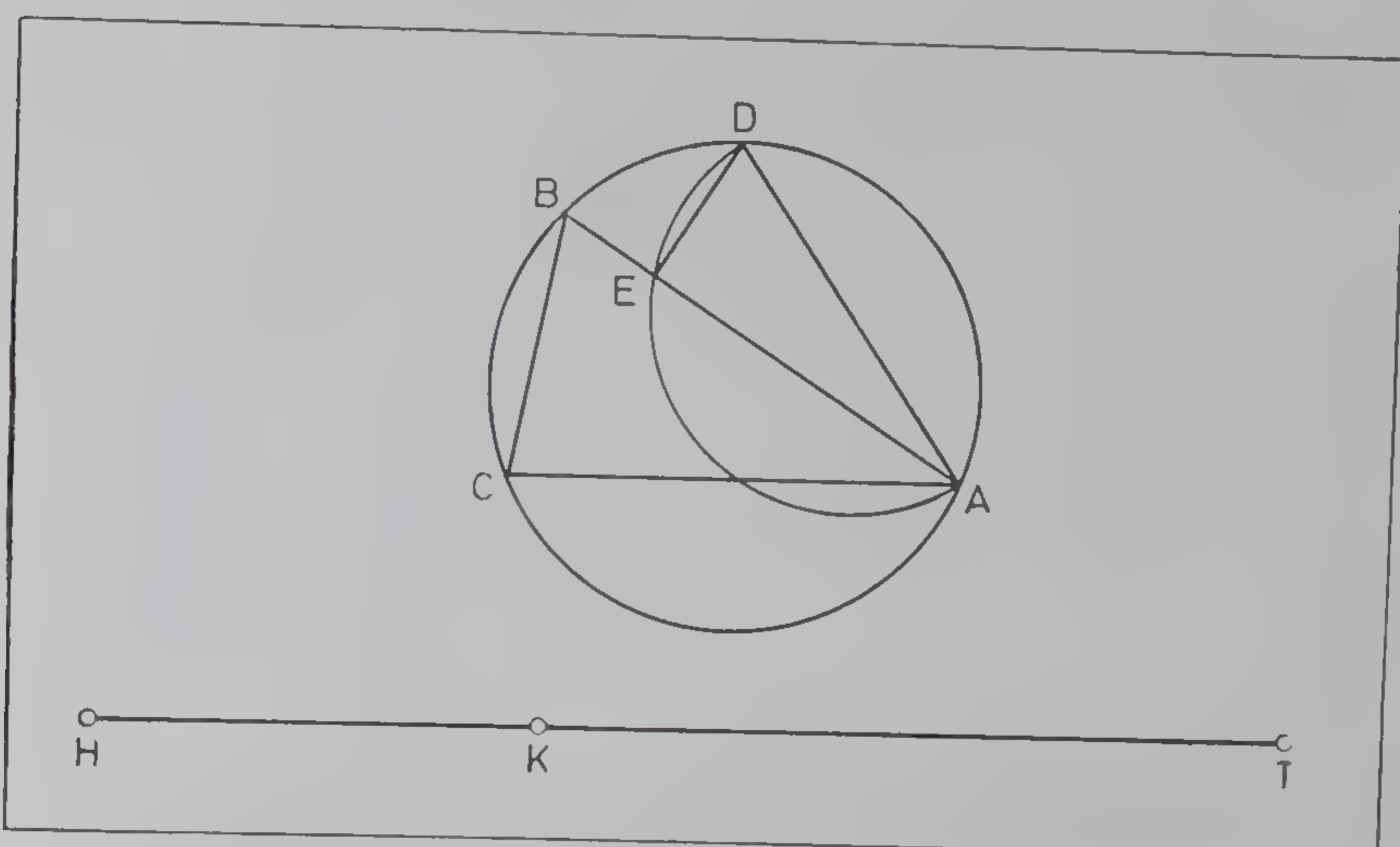


(شکل ۶۲)

یعنی نقاط E و F نقاطی ازخط راست AB هستندکه پاره‌خط AC را به نسبت (نقصانی واضافی) $\frac{BA}{BC}$ تقسیم می‌کنند و چون این نسبت معلوم است می‌توان نقاط E و F را یافت . نقطهٔ B روی دایرهٔ به‌قطر EF واقع است. پس‌نقطهٔ B در فصل مشترك دومکان مذکورقراردارد ومسئله حل است.

مسئلهٔ پنجم(۱)ـ محاط کردن مثلثی دردایره‌ای مفروض به‌قسمی که مجموع اضلاع آن مساوی با پاره خط معلوم HT باشد (۲).

راه حل ازاستاد (۳)ـ باید طول HT از محیط مثلث متساوی الاضلاعی که دردایرهٔ مفروض محاط شود بزرگتر نباشد (۴)(تاحل مسئله ممکن گردد.) روی پاره خط HT نقطهٔ دلخواهی مانند K اختیار می کنیم(۵). و وتر AC را در دایرهٔ مفروض مساوی با HK رسم مـی کنیم. سپس کمان AC رادر نقطهٔ D نصف کرده (۶) نقطهٔ A را بـه نقطهٔ D وصل مـی‌نماییم. آنگاه بـه قطر AD نیمدایره‌ای (در داخل دایرهٔ‌مفروض) رسم مـی کنیم ووتر AE را درآن نیمدایره مساوی با نصف پاره خط KT می‌سازیم. سپس AE را امتداد می‌دهیم تـا کمان AC را درنقطهٔ B قطع کندونقطهٔ B را به C وصل می کنیم. محیط مثلث ABC (که در دایرهٔ‌مفروض محاط شده) مساوی‌با طول HT است(۷).



(شکل ۶۳)

برهان - پاره خط AC مساوی با HK است . و پاره خط AE که (بنابر قضیهٔ اول) نصف طول خط شکستهٔ ABC است مساوی با نصف KT است. بنابراین همهٔ طول خط شکستهٔ ABC مساوی با KT است . پس محیط مثلث ABC مساوی با طول HT است .

واین همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت‌های مربوط به مسئلهٔ پنجم:

(۱)- عل: ص ۲۲- سوتر A: ص۳۷- چد:ص ۵۷ -چم: ص ۱۰۰

(۲)- صورت این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین بیان شده است :

«عمل مثلث فی دایرة مفروضة یساوی مجموع اضلاعه خطاً مفروضاً **لی**.»

(۳)- استاد خود، چنانکه درفوق ملاحظه می‌شود، درپایان صورت مسئله (درنسخهٔ «عل») اضافه کرده است: **لی** (یعنی از من).

(۴)- زیرا می‌توان ثابت کرد: که «ازهمهٔ مثلثهایی که دریک دایرهٔ معلوم محاط شوند آنکه متساوی الاضلاع باشد محیطش بزرگتر است.» (رجوع کنید به حل المسایل هندسهٔ F . G . M صفحات ۴۳۶ و ۴۳۷ مسائل شمارهٔ ۲۹۷ و ۲۹۸). اگرشعاع دایرهٔ مفروض را r وطول پاره‌خط معلوم HT را l بنامیم، چون ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی مساوی با $r\sqrt{۳}$ است، شرط امکان مسئله این است که داشته باشیم :

$$l \leqslant ۳\,r\sqrt{۳}$$

(۵)- استاد شرطی برای اختیار نقطهٔ K روی HT ذکرنکرده است وحال آنکه قید دو شرط زیرلازم است:

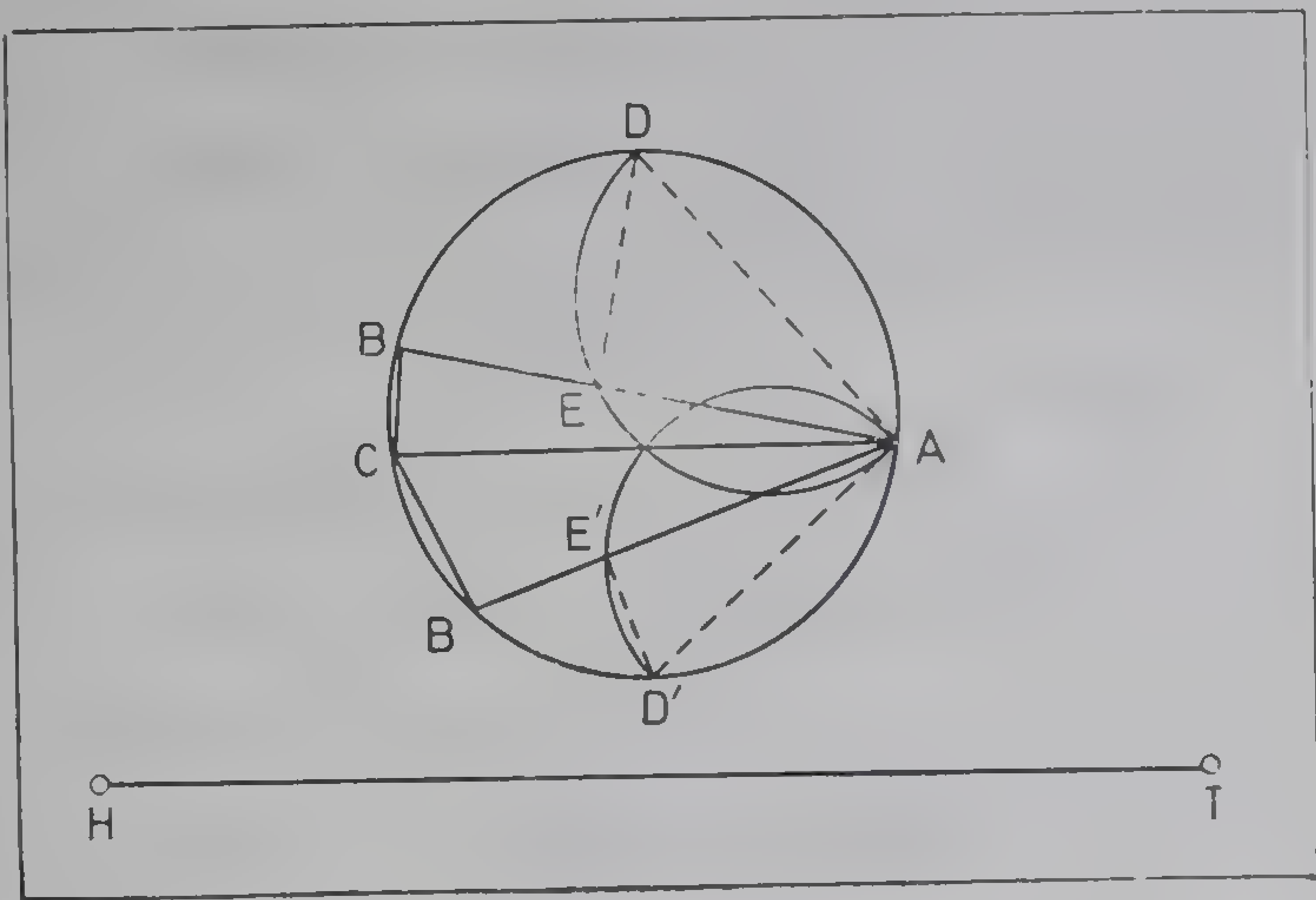
اولا باید HK از نصف HT کوچکتر باشد. زیرا اگر طول HT را l بنامیم و HK را یك ضلع مثلث بگیریم، مجموع دوضلع دیگر مثلث مساوی با $KT=l-HK$ می‌شود. وچون درهرمثلث هرضلع ازمجموع دوضلع دیگر کوچکتر است باید داشته باشیم:

$$HK<l-HK \quad \text{یعنی :} \quad HK<\frac{l}{۲}$$

ثانیاً باید HK از قطر دایرهٔ مفروض کوچکتر باشد تا بتواند وتر دایره شود. پس اگرشعاع دایرهٔ مفروض را r بنامیم باید داشته باشیم: $HK\leqslant ۲r$ بنابراین باید HK از کوچکترین دوطول $\frac{l}{۲}$ و ۲r کوچکتر باشد.

(۶)ـ وتر AC روی دایرهٔ مفروض دوکمان AC پدید می‌آورد. استاد نگفته است که کدام کمان را نصف می‌کنیم. رجوع کنید به قسمت سوم یادداشت زیر.

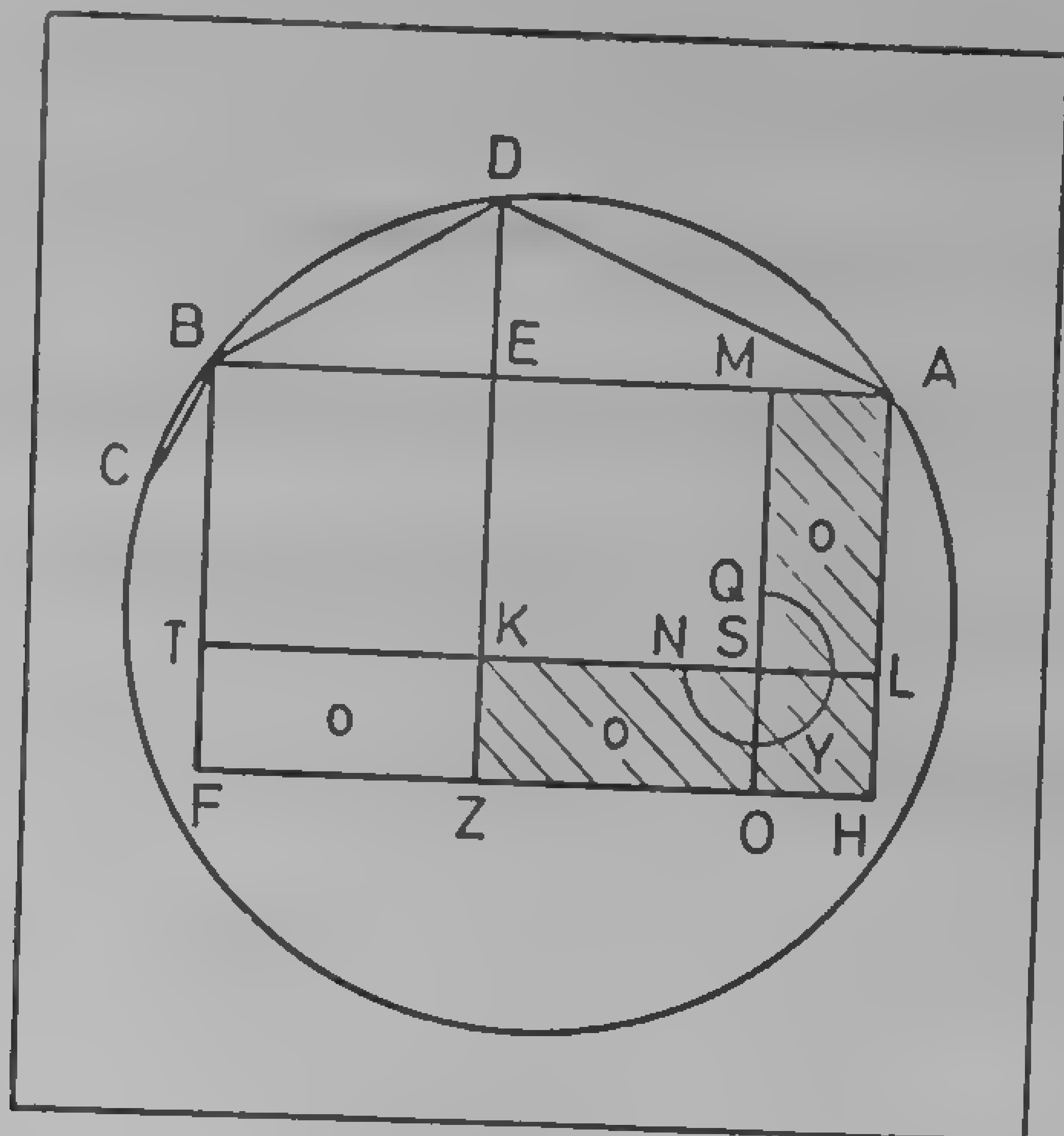
(۷)ـ اصولا این مسئله درصورتی که ممکن باشد بی‌نهایت جواب دارد. زیرا اولا انتخاب یك رأس مثلث، مثلا رأس A، روی دایرهٔ مفروض اختیاری است. ثانیاً اگر مثلث ABC جواب مسئله باشد وقرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به عمود منصف پاره خط AC نقطهٔ $B_۱$ بنامیم مثلث $AB_۱C$ نیز جواب مسئله خواهد بود. ثالثاً پس ازآنکه ضلع AC رارسم کردیم وتر AC روی دایرهٔ مفروض دوکمان پدید می‌آورد. اگروسط کمان بزرگتر را نقطهٔ D ووسط کمان کوچکتر را نقطهٔ D' بنامیم برحسب آنکه AE یعنی نصف KT از AD' کوچکتر ویا باآن مساوی ویا ازآن بزرگتر باشد عدهٔ جوابهای مسئله فرق می‌کند. مثلا درشکل زیر که AE از AD' کوچکتر است دومثلث ABC و $AB'C$ هردوجواب مسئله‌اند.



(شکل ۶۴)

مسئلهٔ ششم(۱)ـ برهان درستی دستور ارشمیدس دربارهٔ محاسبهٔ طول ارتفاعات مثلثهائی که اضلاع آنها معلوم باشد ومحاسبهٔ پاره‌خطهایی که پای هرارتفاع روی قاعدهٔ نظیرخود پدید می‌آورد(۲).

ارشمیدس گفته‌است(۳): «مربع یکی‌ازاضلاع را ازمربع ضلع‌دیگر کم کرده حاصل را برقاعده تقسیم می‌کنیم. اگر آنچه را به این ترتیب به دست می‌آید به قاعده بیفزاییم ونصف آن رابگیریم طول پاره خط بزرگتری که پای ارتفاع روی قاعده پدید می‌آورد نتیجه خواهد شد. و اگر آن را از قاعده کم کنیم و نصف آن را بگیریم طول پاره‌خط کوچکتری که پای ارتفاع‌روی قاعده پدید می‌آورد به دست خواهد آمد.



(شکل ۶۵)

خلاصهٔ مطلب این است که اگر در مثلث ADB پای ارتفاع نظیر رأس D را روی AB نقطهٔ E بنامیم داریم(۴) :

$$AE = \frac{1}{2}\left(AB + \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}\right)$$

و

$$BE = \frac{1}{2}\left(AB - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}\right)$$

برهان اول از استاد(۵)ـ مثلث ADB را در نظر گرفته ارتفاع AE (نظیر قاعدهٔ AB) ودایرهٔ محیطی مثلث را رسم می کنیم. وروی دایرهٔ محیطی کمان $\widehat{DC}$ را مساوی با کمان $\widehat{DA}$ جدا کرده BC را رسم می کنیم وروی AE مربع AZ

وروی BE مربع ET را می‌سازیم* و (روی EA) پاره‌خط EM را مساوی با EB جدا کرده از نقطهٔ M خط MO را موازی با EZ واز نقطهٔ T خط TKL راموازی با AB می کشیم و مستطیل AF را کامل می کنیم.

چون $\overline{BD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BE}^2$ (درمثلث قائم‌الزاویهٔ BED)

و $\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2$ (درمثلث قائم‌الزاویهٔ AED)

بنابراین (اگر تساوی اول را عضو به‌عضو از تساوی دوم کم کنیم):

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

و واضح است که تفاضل $\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$ مساوی با مساحت عَلَم QYN (یعنی مساحت قسمتی که روی شکل هاشور خورده‌است[۴]).

از طرف دیگر چون $TK = KS = SM$

و $TF = KZ = AM$

بنابراین مستطیل‌های TZ و KO و ML متساویند. پس:

مساحت عَلَم QYN = مساحت مستطیل TH

(واین مساحت چنانکه دیدیم مساویست با $\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$)

اما چون: $AM = CB$

(زیرا نقطهٔ E وسط خط شکسته ABC است و $BE = EM$)

* هرچهارضلعی به‌وسیلهٔ اسامی دررأس متقابل آن نامیده‌شده است.

از قضیهٔ اول مطابق با شکل حاصل می‌شود:

$$AE = EB + BC \qquad (۱)$$

وقضیهٔ چهارم‌را مطابق با شکل‌می‌توان چنین‌نوشت (.△ یعنی‌مساحت مثلث):

$$\triangle.ADC - ۲\triangle.BDE = \triangle.ABC \qquad (۲)$$

اکنون مـی گوییم: واضح است کـه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DEB و DZA متشابهند وداریم:

$$\frac{DZ}{AZ} = \frac{DE}{BE} \qquad (۳)$$

با ضرب کردن صورت ومخرج هریك از دونسبت فوق دریك مقدار مناسب می‌توان تساویهای زیررا نتیجه گرفت:

$$\frac{DZ^۲}{DZ \times AZ} = \frac{DZ \times AZ}{AZ^۲} = \frac{DE^۲}{DE \times BE} = \frac{DE \times BE}{BE^۲}$$

واز خواص نسبتهای متساوی حاصل می‌شود:

$$\frac{DZ^۲ - DE^۲}{DZ \times AZ - DE \times BE} = \frac{DZ \times AZ - DE \times BE}{AZ^۲ - BE^۲} \qquad (۴)$$

اکنون مقادیرچهار جملهٔ تناسب(۴) را جداگانه حساب می کنیم

اولا ـ ازدومثلث قائم‌الزاویهٔ AED و AZD می‌توان صورت نسبت طرف چپ رابطهٔ (۴) را چنین نوشت:

$$DZ^۲ - DE^۲ = AD^۲ - AZ^۲ - (AD^۲ - AE^۲) = AE^۲ - AZ^۲$$

ویا $\overline{DZ}^{2} - \overline{DE}^{2} = (AE + AZ)(AE - AZ)$ (۵)

و اگر محیط مثلث ABC را ۲p بنامیم چون نظر به قضیهٔ اول

$$AE = \frac{AB + BC}{2} \quad \text{و} \quad AZ = \frac{AC}{2}$$

معلوم می‌شود که : $AE + AZ = \frac{AB + BC + AC}{2} = p$ (۶)

و $AE - AZ = \frac{AB + BC}{2} - \frac{AC}{2} = p - AC$ (۷)

واگر مقادیر $(AE + AZ)$ و $(AE - AZ)$ را از روابط (۶) و (۷) در رابطهٔ (۵) قراردهیم صورت نسبت طرف چپ تناسب (۴) چنین نوشته می‌شود:

$$\overline{DZ}^{2} - \overline{DE}^{2} = p(p - AC) \quad (8)$$

ثانیاً ـ وسطین تناسب (۴) با هم مساویند و می‌توان آنها را چنین نوشت (△. یعنی مساحت مثلث) :

$$DZ \times AZ - DE \times BE = \triangle \times ADC - 2\triangle \times BDE$$

ومقدار طرف راست تساوی فوق بنابر قضیهٔ چهارم مساوی است با مساحت مثلث ABC. بنابراین وسطین تناسب (۴) چنین نوشته می‌شود:

$$DZ \times AZ - DE \times BE = \triangle .ABC \quad (9)$$

ثالثاً ـ مخرج نسبت طرف راست تناسب (۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{AZ}^{2} - \overline{BE}^{2} = (AZ + BE)(AZ - BE) \quad (10)$$

و اگرزاویهٔ B منفرجه باشد از تساوی (۲) نتیجه می‌شود :

$$BE = \frac{\overline{AD}^{۲} - (\overline{AB}^{۲} + \overline{BD}^{۲})}{۲AB} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\overline{AD}^{۲} - \overline{BD}^{۲}}{AB} - AB\right)$$

و در این حالت :

$$AE = AB + BE = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\overline{AD}^{۲} - \overline{BD}^{۲}}{AB} + AB\right)$$

درهر صورت ملاحظه می‌شود که آنچه را استاد ثابت کرده است درواقع همان دستور محاسبهٔ مربع ضلع مقابل به زاویهٔ حاده یامنفرجه در مثلث دلخواه است .

۵- درپایان‌صورت مسئله چنانکه دریادداشت شمارهٔ (۲)دیده می‌شود ازقول استاد، درنسخهٔ «عل»، آمده‌است : **لی**(یعنی‌ازمن)

(۶)- استاد خود در بارهٔ برهان دوم، درنسخهٔ «عل» نوشته است .

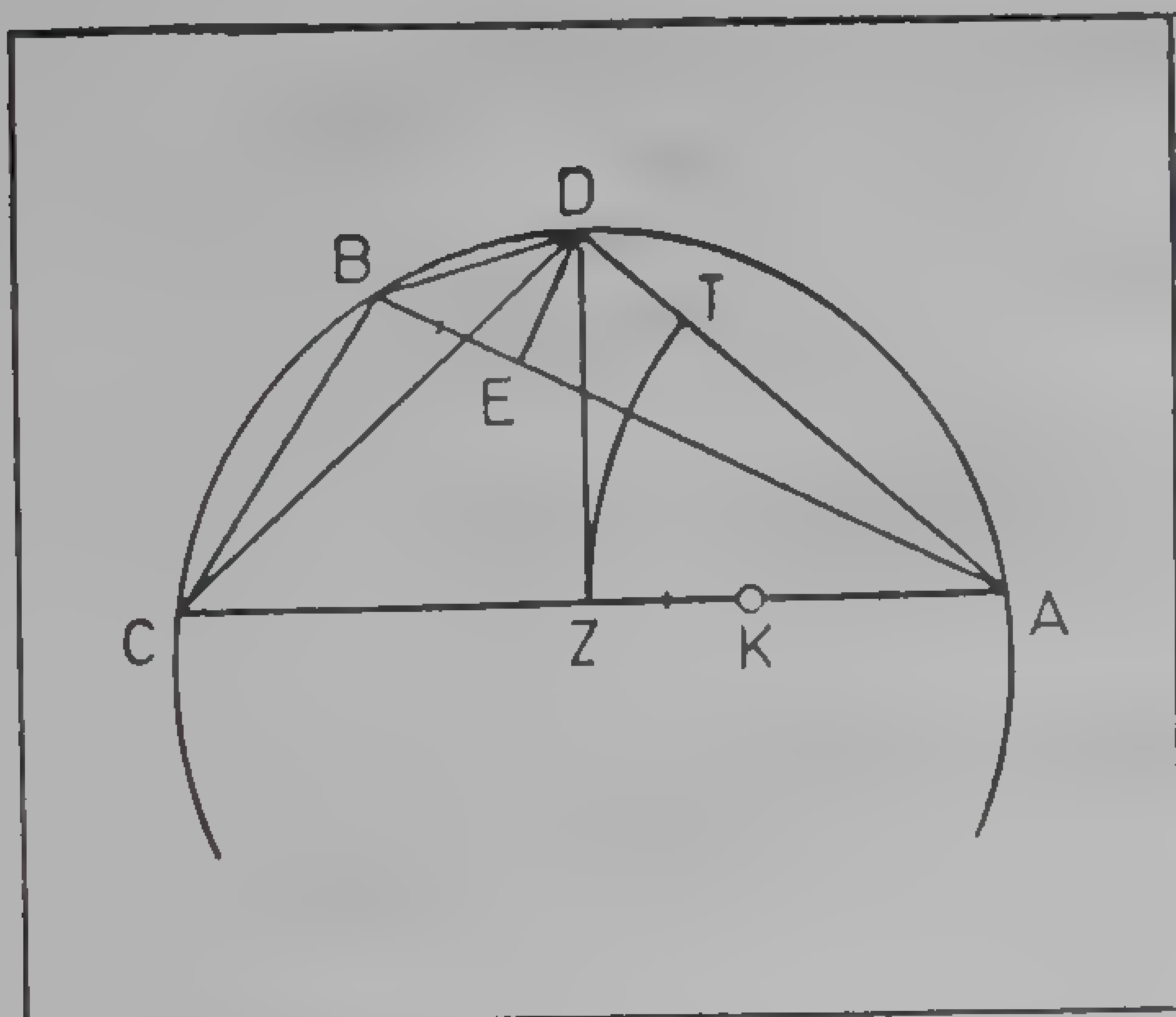
« برهان‌ثان‌لی‌اخف من‌الاول »

(۷)- درنسخهٔ«عل» برهان‌دوم دراینجاتمام‌می‌شود. امادرنسخه‌های چاپی‌بعدازاین برهان مطالب دیگری‌نیزآمده است (رجوع کنیدبه‌چد:ص۶۰

مسئلهٔ‌هفتم(۱)- برهان درستی‌دستورارشمیدس دربارهٔ مساحت‌مثلث برحسب‌اضلاع آن(۲) ازابوعبدالله الشنی(۳).

ارشمیدس گفته است : هر گاه مساحت سطح یک مثلث را بخواهیم ، تفاضل‌نصف مجموع اضلاع‌آن را با هرضلع می گیریم.سپس یکی از این تفاضلهای سه‌گانه را در دیگری و حاصل را در سومی ضرب می کنیم واین حاصل‌ضرب را در نصف مجموع اضلاع مثلث ضرب کرده جذر حاصل را می گیریم مساحت سطح مثلث به دست می‌آید.(۴)»

برهان- ابوعبدالله (الشّنی) برهان درستی دستور فوق را چنین بیان کرده است(۵):



(شکل ۶۸)

مثلث ABC را در نظر گرفته دایرهٔ محیطی آن را رسم می کنیم و وسط کمان ABC را نقطهٔ D می نامیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر AB و عمود DZ را بر AC(۶) فرود می آوریم و پاره خطهای AD و DC و DB را رسم می کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع AZ کمانی ازدایره رسم می کنیم تا AB را در نقطهٔ H و AD را در نقطهٔ T قطع کند.

تا اینجا مقدمهٔ استدلال را ازروی نسخهٔ «عل» ترجمه کردم. اماچون بقیهٔ استدلال به وجهی طولانی بیان شده ودر بعضی ازمواضع متن عربی افتادگی واشتباه کتابت دارد وفهم آن آسان نیست بهتر دیدم که خلاصهٔ این استدلال را به وجهی که برای خواننده به سهولت قابل فهم باشد، مطابق باآنچه ازمتن عربی مفهوم می شود، بیان کنم(۷).

ابوعبدالله الشّنی دراین استدلال ازدو قضیهٔ اول وچهارم (رجوع کنید به صفحات ۶۳ و ۱۴۹) استفاده کرده است:

مساوی با EB (یعنی قسمت اقصر قاعده) می‌باشد(۷)

$$\left[EB = \frac{1}{2}\left(AB - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}\right) \quad \text{یعنی}\right]$$

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ ششم:

(۱)- عل‌ص ۲۲ و ۲۳- سوتر A: ص ۳۷و۳۸ ونیز ص۶۹- چد: ص۵۸ تا ۶۰- چم: ص۱۰۱ تا ۱۰۳

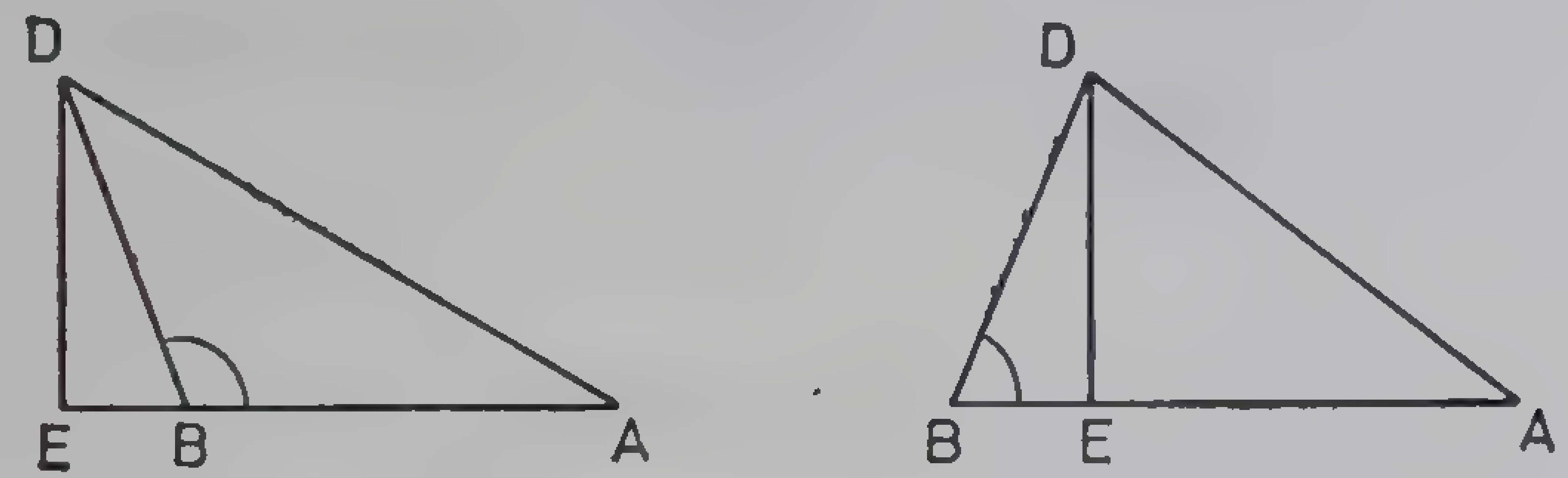
(۲)- صورت این‌مسئله درنسخهٔ «عل» چنین بیان شده‌است: «برهان عمل ارشمیدس فی استخراج اعمدة المثلثات المعلومة الاضلاع و مساقط احجارها لی» - دربارهٔ اصطلاح «مسقطحجر» رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه»: ص۱۸۶ .

(۳)-استاد این‌مسئله‌را ازارشمیدس دانسته‌است. اماچون‌دستورهایی که دراین مسئله‌برای محاسبهٔ طول پاره‌خطهایی‌که به‌وسیلهٔپای یك ارتفاع مثلث روی ضلع مقابل آن پدید می‌آید درکتاب «متریکا» (Metrica) تألیف‌ایرن اسکندرانی (Heron of Alexandria)آمده است مورخان ریاضی این مسئله را به ایرن نسبت می‌دهند (رجوع کنید به «هیث H»: ج۲ص ۳۲۰ و ۳۲۱)- سوتر نوشته است : اینکه مسلمانان این دستور را ازارشمیدس دانسته‌اند و نه ازایرن اسکندرانی مطلبی‌است جالب توجه وممکن است این دستور ودستور مسئلهٔهفتم (خواهدآمد) ازارشمیدس‌باشد ونه ازایرن اسکندرانی.

(۴)- استاد به‌طورضمنی فرض‌کرده است‌که AD > BD وزاویهٔ B را هم مطابق‌با شکل حاده‌گرفته است. روابطی‌راکه استاد به‌ثبوت‌رسانیده است می‌توان ازقضایای مربوط به مربع ضلع‌مقابل به زاویهٔ حاده یازاویهٔ

منفرجه در مثلث دلخواه نتیجه گرفت و برعکس.

به‌طور کلی اگر در مثلث ADB پای ارتفاع نظیر رأس D را روی خط راست AB نقطهٔ E بنامیم، برحسب آنکه زاویهٔ B حاده یا منفرجه باشد (رجوع کنید به «نه مقالهٔ هندسه» مقالهٔ سوم، صفحهٔ ۱۷۵ شمارهٔ ۳۰۶) داریم:



(شکل ۶۷)

(اگر B حاده باشد):

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB \times BE \qquad (1)$$

(اگر B منفرجه باشد):

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + 2AB \times BE \qquad (2)$$

اگر زاویهٔ B حاده و مثلا $AD > BD$ باشد از تساوی (۱) حاصل می‌شود:

$$BE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2}{2AB} = \frac{1}{2}\left(AB - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}\right)$$

در این حالت:

$$AE = AB - BE = \frac{1}{2}\left(AB + \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}\right)$$

پس :

$$TF = AM = BC$$

و بنا براین :

$$TH \text{ مساحت مستطیل } = AB \times BC$$

(یعنی: $\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2} = AB \times BC$)

بنا براین :

$$BC = \frac{\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2}}{AB}$$

واگر این مقدار BC را باقاعدهٔ AB جمع کنیم طول خط شکستهٔ ABC به‌دست می‌آید و نصف آن یعنی AE مساوی است با طول قسمت اعظم قاعده.

[یعنی مطابق با آنچه ارشمیدس گفته است :

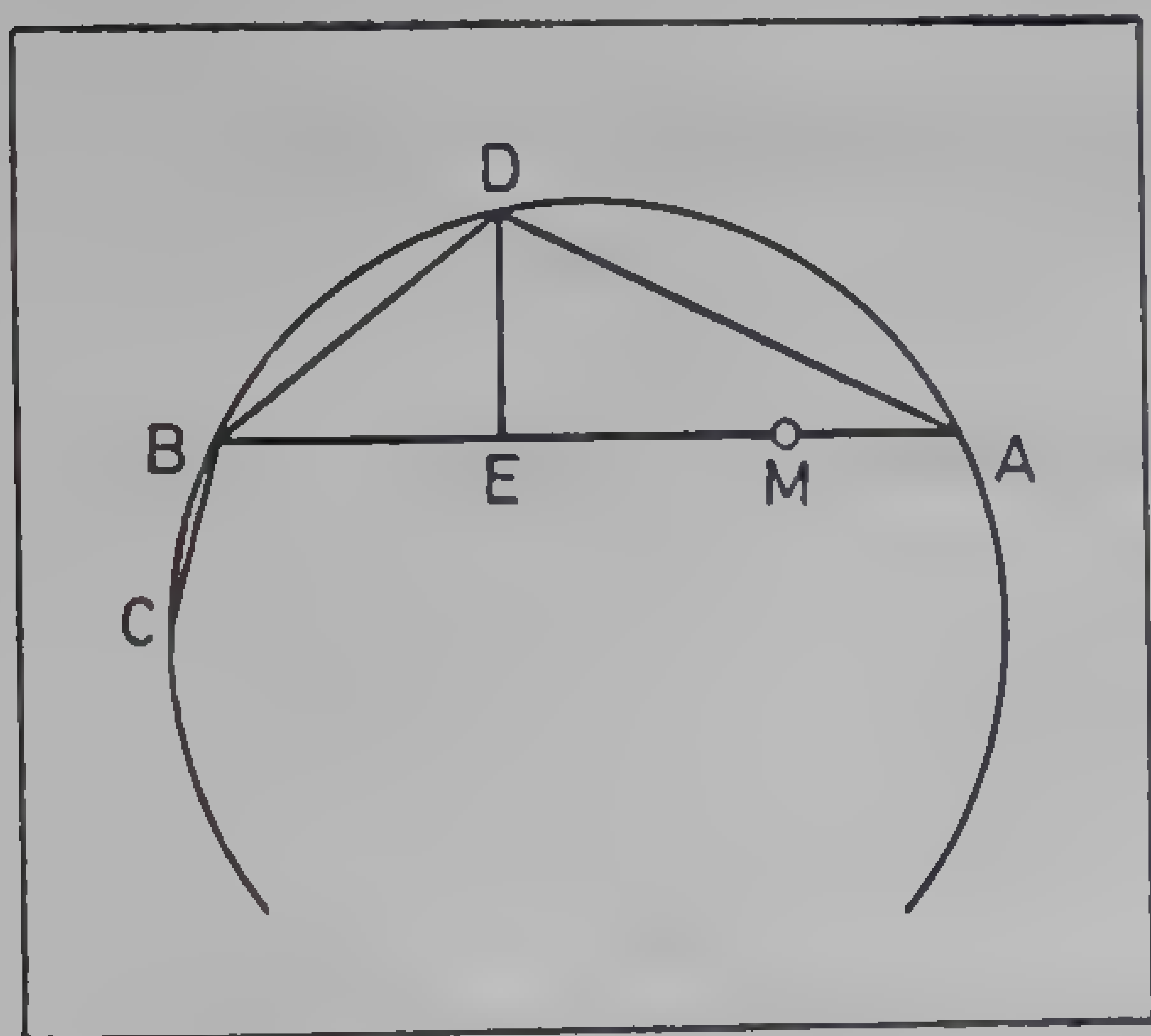
$$\Big[AE = \frac{1}{2}\left(AB + \frac{\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2}}{AB}\right)$$

و اگر مقدار BC را از قاعدهٔ AB کم کنیم BM باقی‌می‌ماند و نصف آن یعنی BE مساوی با طول قسمت اقصر قاعده .

[یعنی مطابق با گفتهٔ ارشمیدس:

$$\Big[BE = \frac{1}{2}\left(AB - \frac{\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2}}{AB}\right)$$

برهان دوم که از برهان اول ساده‌تر است از استاد[۶]- مثلث ADB را در نظر گرفته ارتفاع DE نظیر قاعدهٔ AB و دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می کنیم و روی آن کمان $\widehat{DC}$ را مساوی با کمان $\widehat{DA}$ جدا و نقطهٔ B را به C وصل می کنیم. سپس (روی EA) پاره خط EM را مساوی با EB جدا می نماییم.



(شکل ۶۶)

چون (بنا به قضیهٔ دوم) داریم:

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + AB \times BC$$

پس:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC$$

و از آنجا:

$$\frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} = BC$$

و اگر این مقدار BC را با قاعدهٔ AB جمع کنیم طول خط شکستهٔ ABC به‌دست می آید و نصف آن مساوی با AE (یعنی قسمت اعظم قاعده) است

[یعنی $\left(AE = \frac{1}{2}\left(AB + \frac{AD^2 - BD^2}{AB}\right) \right.$]

و اگر این مقدار BC را از قاعدهٔ AB کم کنیم BM باقی می ماند و نصف آن

و روی پاره‌خط BT نقطهٔ M را طوری اختیار می کنیم که:

$$TM = AH \qquad (۲)$$

اگر طول اضلاع چهار ضلعی ABCD را به ترتیب

$AB = a$ و $BC = b$ و $CD = c$ و $DA = d$ و نصف محیط

چهارضلعی را p بنامیم نظر به قضیهٔ اول داریم:

$$BH = \frac{a+d}{۲}$$ (نقطهٔ H وسط خط شکستهٔ BAD است)

و $$BT = \frac{b+c}{۲}$$ (نقطهٔ T وسط خط شکستهٔ BCD است)

بنابراین:

$$BH + BT = \frac{a+b+c+d}{۲} = p$$

به‌همین‌طریق معلوم می‌شود که:

$$HA + AD + DC + CT = p$$

اکنون تفاضلهای $(p-a)$ و $(p-b)$ و $(p-c)$ و $(p-d)$ با درنظر گرفتن تساویهای فوق و دو تساوی (۱) و(۲) حساب می کنیم:

$$p - a = (BH + BT) - AB = BH + BT - AH - HB$$

$$= BT - AH = BT - CT = BM$$

یعنی $$(p-a)=BM \qquad (۳)$$

$$p-b=(BH+BT)-BC=BH+BT-BT-TC$$

$$=BH-TC=BL$$

یعنی: $$(p-b)=BL \qquad (۴)$$

$$p-c=HA+AD+DC+CT-CD=(HA+CT)+AD$$
$$=AL+AD$$

یعنی: $$(p-c)=AL+AD \qquad (۵)$$

$$p-d=HA+AD+DC+CT-AD=(HA+CT)+CD$$
$$=CM+CD$$

یعنی $$(p-d)=CM+CD \qquad (۶)$$

اکنون اگر مساحت چهارضلعی ABCD را S بنامیم برای اثبات حکم قضیه یعنی اثبات تساوی:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

نظر به روابط(۳)و(۴)و(۵)و(۶) کافی است ثابت کنیم که

$$S^2=BM\times BL\times(AL+AD)(CM+CD)$$

و یا:

$$\frac{BL(AL+AD)}{S}=\frac{S}{BM(CM+CD)} \qquad (۷)$$

برای اثبات صحت این تساوی می گوییم سه مثلث قائم الزاویهٔ EHA و EBZ

مسئلهٔ هشتم (۱)- برهان درستی دستور محاسبهٔ مساحت چهارضلعی دلخواه محاطی که منسوب به هندیان است(۲) از ابوعبدالله الشنی(۳).

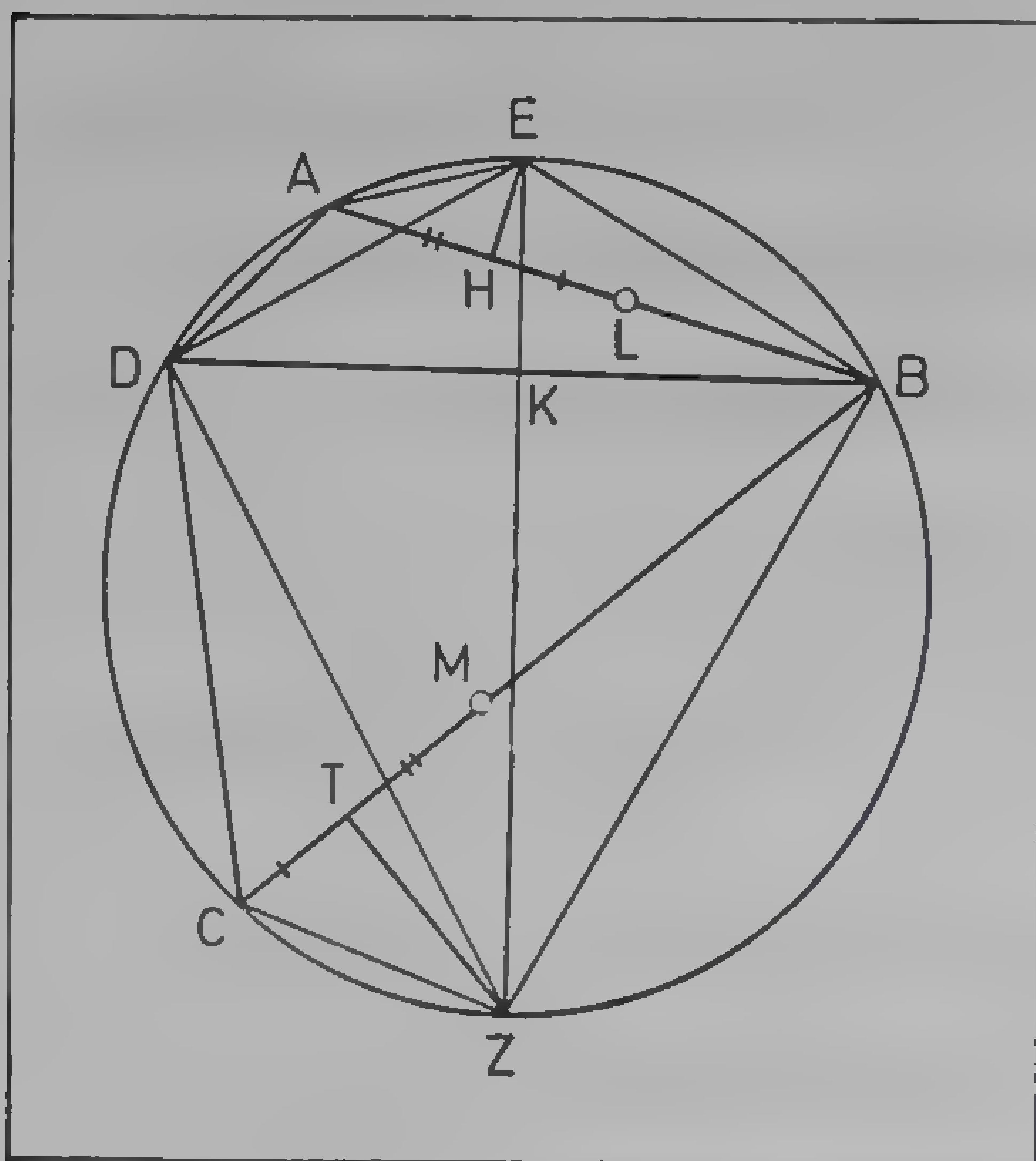
هر گاه بخواهیم مساحت چهارضلعی محاطی دلخواهی را بدانیم نصف مجموع اضلاع آن را حساب می کنیم و تفاضل آن را با هریك از اضلاع چهارضلعی بدست می آوریم. سپس جذر حاصل ضرب این چهار تفاضل را می گیریم، مساحت چهارضلعی به دست می آید (۴).

اگر طول اضلاع چهارضلعی را a و b و c و d ونصف محیط آن را p ومساحت آن را S بنامیم دستورفوق چنین نوشته می‌شود:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ابوعبدالله الشنّی این دستور را بااستفاده از قضایای اول و چهارم رجوع کنید به صفحات ۶۳ و ۱۴۹) ثابت کرده است.

اگرچه استدلالی که استاد ازقول وی نقل کرده است درنسخهٔ «عل» ونسخهٔ چاپی «استخراج الاوتار» اصولا یکی است ولی طرز بیان آن دردونسخه باهم متفاوت است. و حتی اسامی نقاط شکل در دونسخه تفاوت دارد. چون این استدلال علاوه برآنکه مفصل است در هر دونسخه طوری انشاء شده که فهم آن چندان آسان نیست، بدون آنکه در اصول آن تغییر دهم و چیزی به آن اضافه یا ازآن کم کنم، باپس وپیش کردن مطالب آن طوری آن را تحریر می کنم که (شاید) فهم آن آسانتر باشد. وبرای رعایت جانب اختصار آنچه را ازروی شکل واضح است توضیح نمی‌دهم.



(شکل ۷۰)

برهان - چهار ضلعی ABCD را که در یك دایره محاط است در نظر می‌گیریم و کمانهای $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$ را به ترتیب در نقاط E و Z نصف می‌کنیم و پاره خطهای BE و ED و DZ و BZ و EA و EZ را می‌کشیم و از نقطهٔ E عمود EH را بر AB و از نقطهٔ Z عمود ZT را بر BC فرود می‌آوریم و نقطهٔ تقاطع BD را با EZ نقطهٔ K می‌نامیم.

واضح است که $ED > EA$ و چون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ EDK و EHA متشابه هستند از نامساوی فوق معلوم می‌شود که: $DK > AH$.

از طرف دیگر چون نقطهٔ T بنا به قضیهٔ اول وسط خط شکستهٔ BCD است

پس $BT = \frac{BC + DC}{۲}$ بنابراین $BT > DK$

(زیرا EZ قطر دایره و عمود منصف BD است و DK نصف DB می‌باشد)

پس به‌طریق اولی داریم $BT > AH$

به‌همین‌طریق ثابت می‌شود که $BH > CT$

اینك روی پاره خط BH نقطهٔ L را طوری می‌گیریم که:

$$HL = CT \qquad (۱)$$

$$\overline{AZ}^{۲} = AZ \times ZC$$

اما واضح است کـه $AZ = p - AD$ (زیرا $AD + AZ$ نصف محیط است.) و $ZC = p - CD$ بنابراین داریم:

$$\overline{AZ}^{۲} = (p - AD)(p - CD) \qquad (ه)$$

اکنون اگر مقادیر طرفهای چپ تساویهای (ج) و (د) و (ه) را در تساوی (الف) منظور کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{(p - AC)p}{\triangle .ADC} = \frac{\triangle .ADC}{(p - AD)(p - CD)}$$

و از آنجا:

$$(\triangle \cdot ADC)^{۲} = p(p - AC)(p - AD)(p - CD)$$

واین همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ هفتم:

(۱)- عل: ص ۲۳ تا ۲۵- سوتر A: ص ۳۹ و ۴۰ ونیز ۶۹ و ۷۰- چد: ص ۶۱ تا ۶۴- چم: ص ۱۰۴ تا ۱۱۳.

(۲)- عبارت متن عربی در نسخهٔ «عل» چنین است: «برهان عمل ارشمیدس فی مساحة المثلثات من جهة تفاضل اضلاعها لابی عبدالله الشنی»

(۳)- رجوع کنید به «بیرونی نامه»: ص ۵۳۰

(۴)- این همان دستور محاسبهٔ مساحت مثلث برحسب اضلاع آن است که در

کتابهای هندسهٔ کنونی چنین نوشته می‌شود:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

استاد این دستورودستورمربوط به‌مسئلهٔ هشتم را ازارشمیدس دانسته است. دربعضی ازکتابهای تاریخ ریاضیات این دستوررا به‌ایرن اسکندرانی (Heron of Alexandria) نسبت می‌دهند. هیث در کتاب «تاریخ ریاضیات یونانی» خودنوشته‌است که این‌دستوردرکتاب «متریکا» (Metrica) وکتاب «دیوپترا» (Dioptra) تألیف ایرن‌اسکندرانی آمده است ولی اکنون ازاطلاعاتی که ازمنابع‌اسلامی بدست‌آمده‌است می‌دانیم که‌این دستور ازارشمیدس است (رجوع کنید به‌هیث H : ج۲ص۳۲۱و۳۲۲) - ملاحظه می‌شود که نکته‌هایی که‌استاد درضمن‌تألیفات‌خود دربارهٔ‌تاریخ‌ریاضیات گوشزد کرده است تاچه‌حد مورد استفاده دانشمندان معاصر است.

(۵)- سوتر به‌حق اظهار نظرکرده است که اثبات این دستور ودستور مربوط به‌مسئلهٔ هشتم یقیناً از جالب توجه‌ترین قسمتهای کتاب «استخراج الاوتار» استاد بیرونی است. هردواثبات‌بسیاربدیع ویگانه برهانهایی هستند که دراین‌باره ازدورانهای بسیار قدیم‌وقرون وسطی (البته بعدازاثبات‌ایرن اسکندرانی درمورد مساحت مثلث) به دست‌ما رسیده است. وهردو اثبات رابیرونی‌ازابوعبدالله‌الشنّی دانسته‌وازروی‌آنها معلوم‌می‌شود که ابوعبدالله یکی از ریاضیدانان برجسته وزبردست دورهٔ اسلامی بوده است (← سوتر A:ص۷۰) .

(۶)- درنسخهٔ «عل» به‌جای «اج» اشتباهاً نوشته‌شده‌است: «اد»

(۷)- دراین‌قسمت ازصفحهٔ ۷۰ کتاب «سوتر A» نیزاستفاده کرده‌ام.

(۸)- ابوعبدالله‌الشنی برای اثبات این قسمت ابتدا پاره‌خط ZK را روی ZA مساوی با BE جداکرده ونشان داده است که :

$$\overline{AZ}^2 - \overline{BE}^2 = AK \times CK$$

وهمان تساوی شمارهٔ (۱۱) را به دست آورده است .

اما $AZ = \frac{AC}{۲}$ و $BE = \frac{AB - BC}{۲}$

(زیرا نقطهٔ E نظر به‌قضیهٔ اول وسط‌خط‌شکستهٔ ABCاست)

پس تساوی (۱۰) چنین‌نوشته می‌شود[۸]:

$$AZ^{۲} - BE^{۲} = \left(\frac{AC}{۲} + \frac{AB - BC}{۲}\right)\left(\frac{AC}{۲} - \frac{AB - BC}{۲}\right)$$

و چون محیط‌مثلث ABC را ۲p نامیده‌ایم داریم :

$$AZ^{۲} - BE^{۲} = (p - BC)(p - AB) \qquad (۱۱)$$

حال اگر مقادیر‌طرفهای چپ تساوی (۸)و(۹) و(۱۱)رادررابطهٔ (۴) منظور کنیم‌نتیجه می‌شود :

$$\frac{p(p - AC)}{\triangle.ABC} = \frac{\triangle.ABC}{(p - BC)(p - AB)}$$

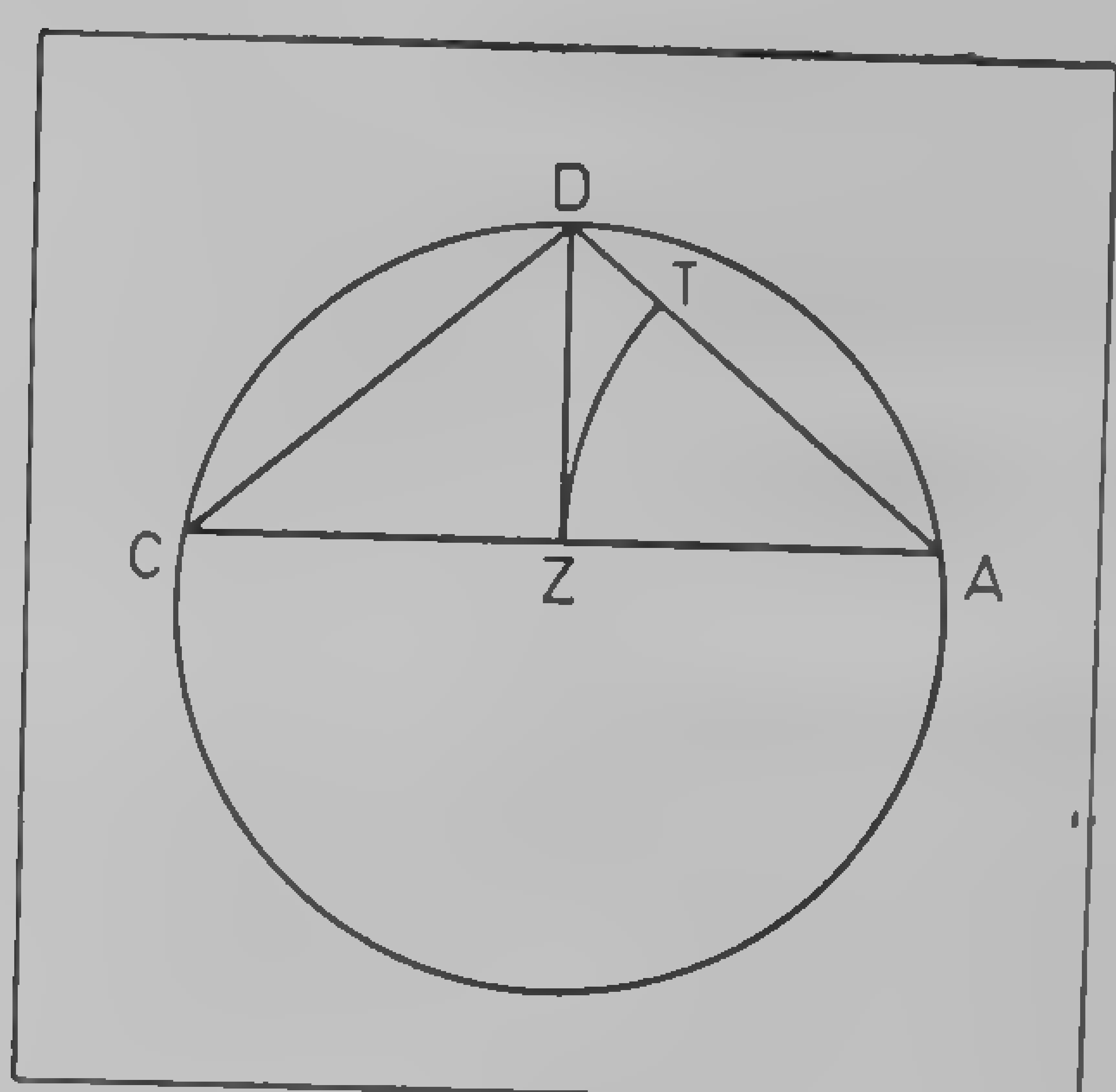
وازآنجا

$$(\triangle.ABC)^{۲} = p(p - AC)(p - BC)(p - AB)$$

ویا

$$\triangle.ABC = \sqrt{p(p - AC)(p - BC)(p - AB)}$$

ابوعبدالله الشنّی پس ازاثبات دستورفوق حالتی راکه‌مثلث‌متساوی‌الساقین باشد درنظر گرفته وباز دستور کلی را در این حالت خاص به وجه زیر ثابت کرده است: فرض می کنیم که مثلث ADC متساوی الساقین باشد (AD = DC) و دایرهٔ محیطی مثلث و ارتفاع AZ نظیر ضلع AC را رسم می کنیم وبه‌مرکز Aوبه‌شعاع AZ کمانی از دایره



(شکل ۶۹)

رسم می کنیم تا ADرا در نقطهٔ T قطع کند.

اگـر صورت ومخرج نسبت $\frac{DZ}{AZ}$ را یك‌بار در DZ ویك‌بار در AZ ضرب کنیم حـاصل می‌شود:

$$\frac{\overline{DZ}^{2}}{DZ \times AZ} = \frac{DZ \times AZ}{\overline{AZ}^{2}} \qquad \text{(الف)}$$

اکنون مقادیر چهارجملهٔ تناسب (الف) را جداگانه حساب می کنیم:

اولاًـ ازروی‌شکل واضح‌است که:

$$\overline{DZ}^{2} = \overline{AD}^{2} - \overline{AZ}^{2} = \overline{AD}^{2} - \overline{AT}^{2} = (AD - AT)(AD + AT)$$

ویا

$$\overline{DZ}^{2} = DT(AD + AZ) \qquad \text{(ب)}$$

اما اگر محیط مثلث‌راp۲ بنامیم واضح است که:

$$DT = p - 2AZ = p - AC \quad \text{و} \quad AD + AZ = p$$

پس تساوی (ب) به‌صوٌرت زیر درمی‌آید:

$$\overline{DZ}^{2} = (p - AC)p \qquad \text{(ج)}$$

ثانیاًـ طرفین تناسب الف که با هم مساوی‌هستند هر کدام‌مساوی بامساحت مثلث ADC است. پس

$$DZ \times AZ = \triangle.ADC \qquad \text{(د)}$$

ثالثاًـ مخرج نسبت‌طرف‌راست‌تناسب(الف)یعنی $\overline{AZ}^{2}$رامی توان‌چنین نوشت:

و CTZ متشابه‌هستند و داریم :

$$\frac{EB}{BZ}=\frac{EH}{HA}=\frac{CT}{TZ} \qquad (\text{۸})$$

اکنون صورت ومخرج هریك از سه‌نسبت فوق را یك‌بار درصورت ویك‌بار درمخرج همان نسبت ضرب می کنیم حاصل می‌شود :

$$\frac{\overline{EB}^{2}}{ED\times BZ}=\frac{EB\times BZ}{\overline{BZ}^{2}}$$

و

$$\frac{\overline{EH}^{2}}{EH\times HA}=\frac{EH\times HA}{\overline{HA}^{2}}$$

و

$$\frac{\overline{CT}^{2}}{CT\times TZ}=\frac{CT\times TZ}{\overline{TZ}^{2}}$$

وچون همهٔ نسبتهای فوق نظر به‌روابط(۸) باهم‌مساویند نظر به‌خاصیت نسبتهای متساوی می‌توان نوشت :

$$\frac{\overline{EB}^{2}-(\overline{EH}^{2}+\overline{CT}^{2})}{EB\times BZ-(EH\times HA+CT\times TZ)}= \qquad (\text{۹})$$

$$=\frac{EB\times BZ-(EH\times HA+CT\times TZ)}{\overline{BZ}^{2}-(\overline{HA}^{2}+\overline{TZ}^{2})}$$

اکنون نشان می‌دهیم که تساوی (۹) همان‌تساوی(۷) است که صحت آن را ثابت کرده‌ایم:

اولاً صورت نسبت طرف چپ تساوی (۹) را می‌توان چنین نوشت :

$$\overline{EB}^{2}-(EH^{2}+\overline{CT}^{2})=(\overline{EB}^{2}-EH^{2})-\overline{HL}^{2}=HB^{2}-\overline{HL}^{2}$$

$$=(HB+HL)(HB-HL)$$

$$=(HB+HL)\times BL=(AL+AD)\times BL$$

بنابراین صورت نسبت طرف چپ تساوی (۹) مساوی با صورت نسبت طرف چپ تساوی (۷) است .

ثانیاً از روی شکل واضح است که ($\triangle$. یعنی مساحت) :

$$EB \times BZ = \triangle .EBZD$$

ازطرف دیگر نظر به قضیهٔ چهارم داریم :

$$\triangle .BED - \triangle .BAD = EH \times HA$$

$$\triangle .BZD - \triangle .BCD = ZT \times CT$$

و اگر دو تساوی اخیر را عضو به عضو باهم جمع کنیم حاصل می‌شود:

$$\triangle .BEZD - \triangle .ABCD = EH \times HA + ZT \times CT$$

بنابراین هریك از وسطین تناسب (۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$EB \times BZ - (EH \times HA + CT \times TZ) =$$
$$= \triangle .EBZD - (\triangle .EBZD - \triangle .ABCD) = \triangle .ABCD = S$$

پس وسطین تناسب (۹) همان وسطین تناسب (۷) هستند.

ثالثاً مخرج نسبت طرف راست تساوی (۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{BZ}^2 - (\overline{HA}^2 + \overline{TZ}^2) = (\overline{BZ}^2 - \overline{TZ}^2) - TM^2 = \overline{BT}^2 - \overline{TM}^2$$

$$= (BT - TM)(BT + TM) = BM(CT + CD + TM)$$
$$= BM \times (CD + CM)$$

پس مخرج نسبت طرف راست تساوی (۹) مساوی با مخرج نسبت طرف راست تساوی (۷) است و قضیه ثابت می‌باشد.

یادداشت‌های مربوط به مسئلهٔ هشتم:

۱- عل: ص ۲۵ و ۲۶ - سوتر A : ص ۴۰ و ۷۰- چد: ص ۶۴ تا ۶۷ - چم: ص ۱۱۴ تا ۱۱۹

(۲)- عبارت متن عربی درنسخهٔ «عل» چنین است: «برهان عمل ینسب الی الهندفی مساحة المنحرف الذی یحیط به دایرة لابی عبدالله الشنّی» - دربارهٔ اصطلاح «منحرف» رجوع کنید به «بیرونی نامه» ص ۲۱۰ و ۱۹۱

(۳)- رجوع کنید به «بیرونی نامه» ص ۵۳۰

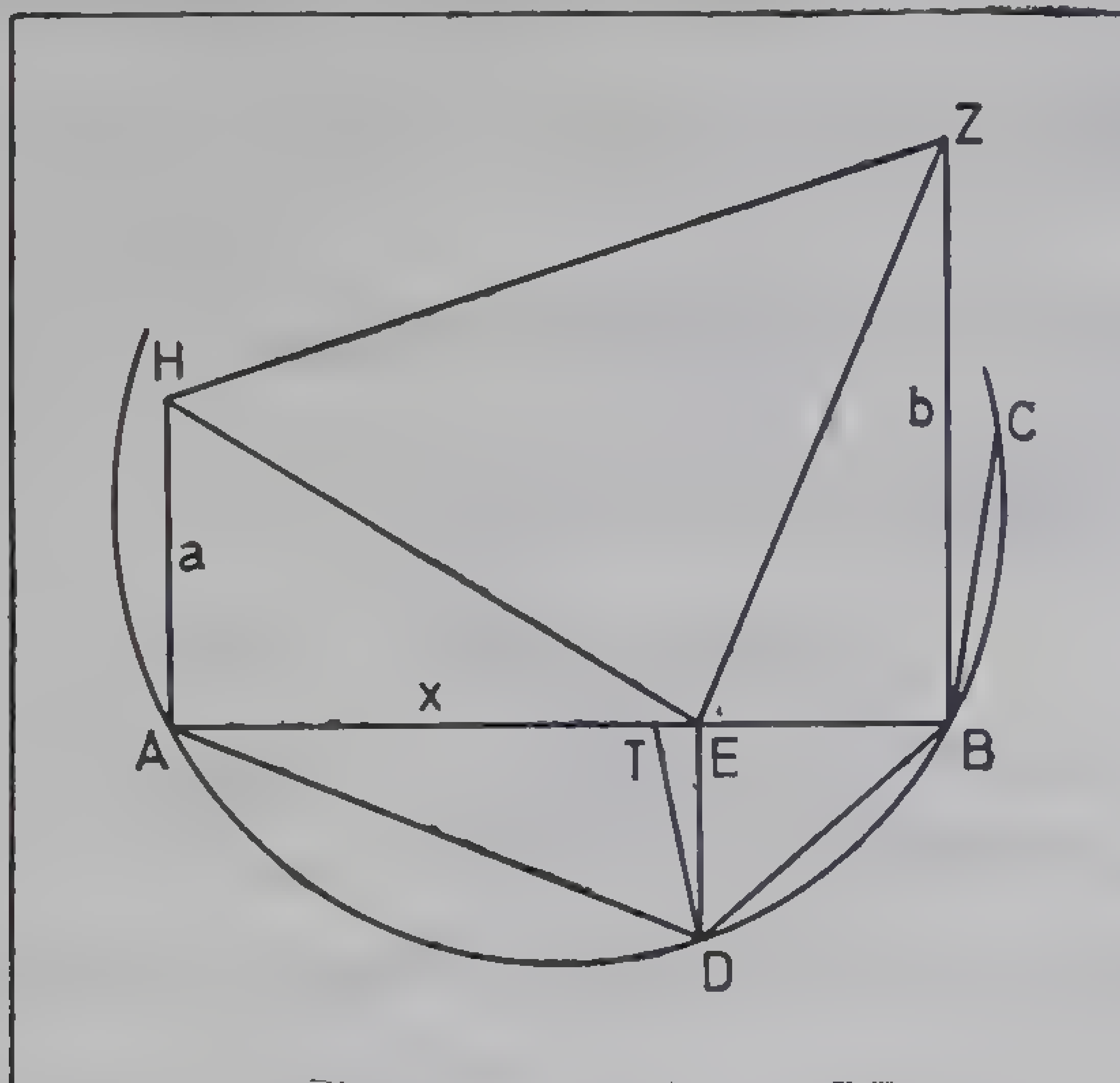
(۴)- استاد این دستوررا منسوب به هندیان دانسته‌است. -درکتابهای تاریخ ریاضیات این دستور را از برهماگوپتا (Brahmagupta) می‌دانند (رجوع کنید به : «کاژری H» : ص ۸۶ و ۸۷- یوشکویچ G: ص ۱۵۵) -همچنانکه دریادداشت شمارهٔ (۵) مسئلهٔ هفتم نوشتم سوتر برهان این دستور و نیز برهان مسئلهٔ هفتم را از بدیعترین قسمتهای کتاب «استخراج الاوتار» دانسته ونوشته است که این برهان یگانه برهانی است که برای این دستور ازدورانهای قدیم وقرون وسطی به‌دست ما رسیده است.

مسئلهٔ نهم (۱) - مسئلهٔ دو درخت خرما ونهر آب ودو پرنده واین مسئله‌یی است که ذکر آن در کتابهای جبر و مقابله متداول است(۲).

صورت مسئله این است:

دودرخت (خرما) BZ و AH به‌طولهای معلوم بردو کنار نهری به‌عرض معلوم AB قراردارند. یك ماهی درسطح آب ظاهر می‌شود و دو پرنده از سر دو درخت به‌طرف او(به‌خط مستقیم وبا سرعتهای متساوی) پایین می‌آیند ودریك لحظه به‌ماهی می‌رسند. می‌خواهیم فاصلهٔ محل ظهورماهی را از کنار نهروهمچنین فاصله‌ای را

که هریك از دو پرنده در هوا پیموده‌اند (تا به‌ماهی رسیده‌اند) حساب کنیم[۳].



(شکل ۷۱)

راه حل از استاد[۴]ـ (البته فرض این است که محل ظهور ماهی ونقاط A و B یعنی پاهای دودرخت بریك استقامت هستند).

اگر طولهای دو درخت خرما را $AH = a$ و $BZ = b$ و فاصلهٔ پای دودرخت را $AB = d$ بنامیم و فرض کنیم کـه دو پرنده در نقطهٔ E به ماهی می‌رسند دستورهایی را کـه استاد برای حل مسئله داده است[۵] می‌توان به صورت زیر درآورد:

$$AE = \frac{۱}{۲}\left(\frac{b^۲ - a^۲}{d} + d\right)$$

$$BE = d - AE$$

$$EH = EZ = \sqrt{a^۲ + \overline{AE}^۲} = \sqrt{b^۲ + \overline{BE}^۲}$$

برهان - فرض می کنیم طول درخت بزرگتر BZ و طول درخت کوچکتر AH ونقطهٔ ظهورماهی برسطح آب E باشد و نقاط H وZ رابه E وصل‌می کنیم. واضح است که EH = BZ. زیرا این دوطول‌را دو پرنده دریك‌زمان (و باسرعتهای متساوی) پیموده‌اند. بنابراین:

$$\overline{BZ}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AE}^2$$

و یا(۶):

$$\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

اکنون مثلث ADB را به قسمی می‌سازیم که AD = BZ و BD = AH باشد(۷) وDE را رسم کرده می گوییم DE برAB عمود است. زیرا اگرDE برAB عمود نباشد می‌توان عمود DT را از نقطهٔ D بر AB فرودآورد.

دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AT}^2 - \overline{BT}^2$$

اما قبلا دیدیم که:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

پس‌لازم می آید که:

$$\overline{AT}^2 - \overline{BT}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

یعنی هم DT برAB عمود است وهم DE واین‌ممکن‌نیست. (پس‌همچنانکه گفتیم DE برAB عمود است).

اینك دایرهٔ محیطی مثلث ADB را رسم کرده روی آن کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی باکمان $\widehat{AD}$ جدا می کنیم. خط شکستهٔ ABC در این دایره محاط شده

و از نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ عمود DE بر AB فرود آمده است. و (بنا به قضیهٔ دوم) داریم:

$$\overline{AD}^۲ - \overline{BD}^۲ = AB \times BC$$

و از آنجا:

$$BC = \frac{\overline{AD}^۲ - \overline{BD}^۲}{AB} = \frac{\overline{BZ}^۲ - \overline{AH}^۲}{AB}$$

اما (بنا به قضیهٔ اول):

$$AB + BC = ۲AE$$

بنابراین:

$$AE = \frac{۱}{۲}(BC + AB) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\overline{BZ}^۲ - \overline{AH}^۲}{AB} + AB\right)$$

واین فاصلهٔ محل ظهور ماهی از پای درخت AH است. اگر AE را از AB کم کنیم فاصلهٔ نقطهٔ E از پای درخت به دست می آید[۸].

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ نهم:

(۱)- عل: ص۲۶ و ۲۷- سوتر A: ص۴۲ تا ۴۴ و نیز صفحات ۷۰ و ۷۱- چد: ص۸۲ تا ۸۴- چم ۱۳۱ تا ۱۳۴.

(۲)- عنوان این مسئله درنسخهٔ «عل» چنین است: «مسئلة النخلتین والنهر والطائران وهی متداوله فی کتب الجبر و المقابله لی»

(۳)- این مسئله از مسائل بسیار قدیمی است که در کتابهای جبر و مقابله آمده است. ازجمله ابوبکر بن محمد بن حسین کرجی آن را در کتاب «الکافی فی الحساب»

خودآورده است (رجوع کنید به سوترA : ص۷۱- برای کسب اطلاع از احوال و آثار کرجی رجوع کنید به «قربانی : ریاضیدانان ایرانی: صفحات ۲۶۸ به‌بعد). همین‌مسئله را غیاث‌الدین جمشید کاشانی در «مفتاح‌الحساب» با معلومات عددی آورده وآن را از راه جبر حل کرده‌است (مفتاح‌الحساب چاپی صفحهٔ ۲۴۳ به‌بعد) و ترجمهٔ فارسی آن عیناً در کتاب «کنزالحساب» تألیف فرهادمیرزا (صفحهٔ ۳۰۸ به‌بعد) آمده است.

(۴) - حل این مسئله از راه جبر بسیار ساده است. چه اگرطولهای دودرخت‌را $AH = a$ و $BZ = b$ وعرض نهر را d ومحل ظهورماهی را درسطح‌آب E بنامیم‌وفاصلهٔ AE را x بگیریم واضح‌است‌که:

$$\overline{EH}^2 = a^2 + x^2 \quad \text{و} \quad \overline{EZ}^2 = b^2 + (d-x)^2$$

وچون $EH = EZ$ پس $a^2 + x^2 = b^2 + (d-x)^2$

ویا

$$2dx = b^2 + d^2 - a^2$$

و از آنجا

$$x = AE = \frac{b^2 + d^2 - a^2}{2d}$$

(۵)- عبارت عربی این دستور درنسخهٔ «عل» چنین‌است:

«انا نضرب کل واحد من طولی النخلتین فی نفسه نقسم فضل ما بین مایجتمع منها علی عرض النهر $\left(\frac{\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2}{d}\right)$ فما خرج نزیده علی المقسوم علیه و نقسم نصف مابلغ $\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2}{d} + d\right)$ فیکون بعد موضع ظهور السمکة من اصل النخلة القصیرة فان القینا ذلك من عرض النهر کله بقی بعده من اصل النخلة الطویله . وان ضربنا طول النخلة فی نفسه و بعد مابین اصلها و موضع السمکة فی نفسه واخذنا جذرمجموع المبلغین

$$\left(\sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{AE}^2}\right)$$

کان ذلك هوماطاره کل واحد من الطائرین»

(۶)- دراینجا وقتی استادخواسته است تساوی دوم را از تساوی اول نتیجه بگیرد عبارت زیر را اضافه کرده است (در نسخهٔ «عل») که ظاهراً افتادگی دارد. آن عبارت این است: «وذلك ظاهر من جهة انه اذا کان مقداران غیرمتساویین فان فضل ما بین الفضولین یکون بعینه فضل مابین الباقی منهما» (این عبارت درنسخه‌های چاپی نیست) .

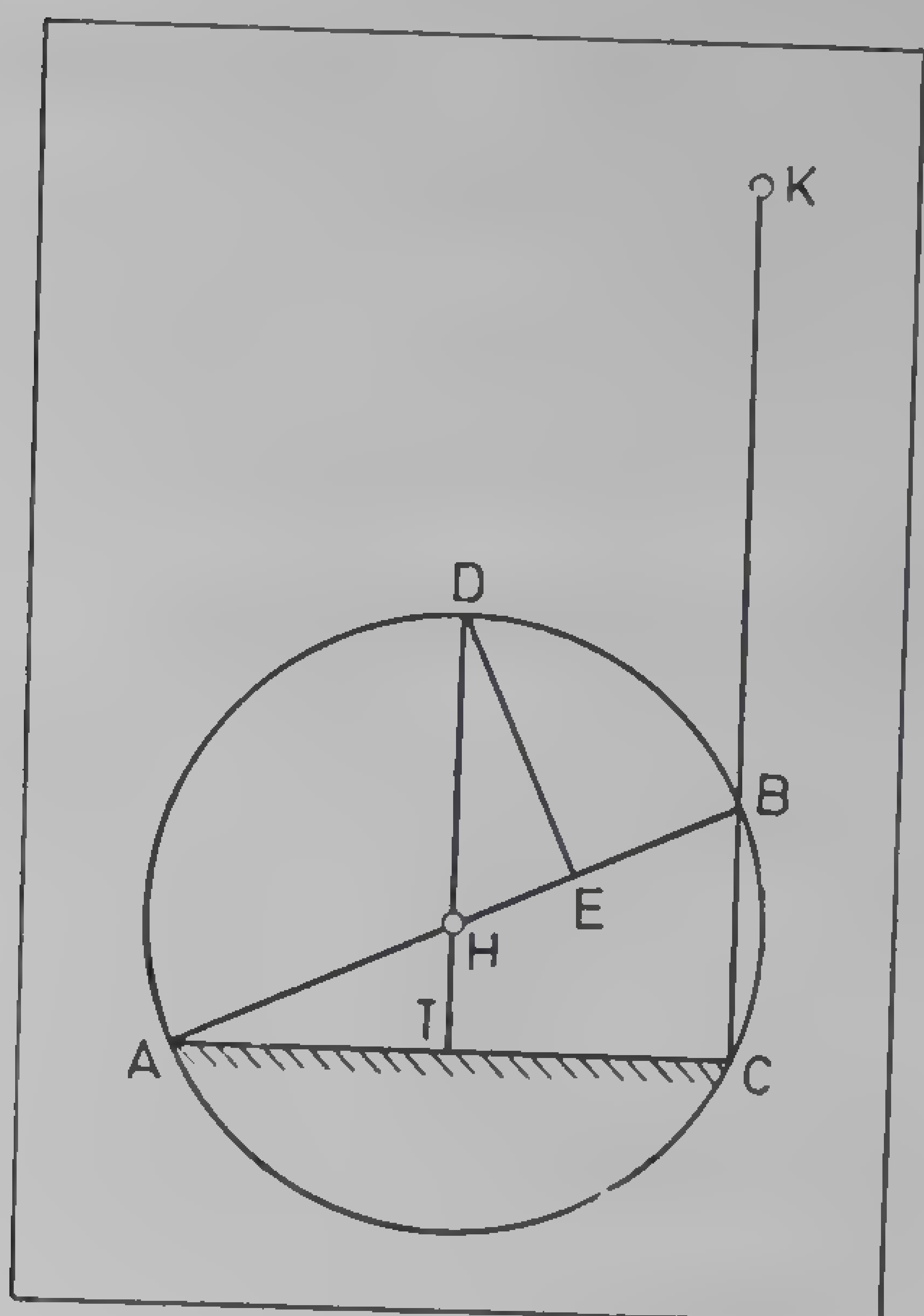
(۷)- شرط امکان ترسیم مثلث ADB این است که AB یعنی عرض نهر از مجموع طولهای دو درخت یعنی AH + BZ کوچکتر باشد . استاد این شرط راقیدنکرده وآقای احمد سعیدالدمرداش درچاپ خود متوجه این مطلب نشده است .

(۸)- چنانکه دریادداشت شمارهٔ (۴) متذکرشدم حل این مسئله از راه جبر بسیار ساده است . ظاهراً استاد برای آنکه مورد استعمال خواص خط شکستهٔ محاط دردایره را درجبر نشان دهد این راه‌حل طولانی را اختیارکرده است که چنانکه در یادداشت شمارهٔ (۷) خاطر نشان کردم کلی هم نیست . درپایان این مسئله درنسخه‌های چاپی عبارتی آمده است که می‌رساند که استاد خود متوجه این مطلب بوده است. چه نوشته است که برای این مسئله ومسئلهٔ دهم (خواهدآمد) راههای ساده‌تری هست . اماغرض ازاین راه حل این است که مورد استعمال خاصیت خط شکستهٔ محاط در دایره و چگونگی تصرف درآن رانشان دهم (وقدیمکن وجود طرق الی المطالب فی المسائل المتقدمه اسهل من التی اتفقت فی الوقت . الا ان الغرض من صرفها الی امر واحد و هو الابانة عن محل خواص هذا الشکل من هذه الصناعة والارشاد الی کیفیة التصرف فیها » (این عبارت در نسخهٔ « عل » در صفحهٔ ۳۲ آمده است) .

مسئلهٔ دهم [۱]**-** مسئلهٔ چوب شکسته که ذکر آن در کتابهای جبر ومقابله آمده است[۲].

صورت مسئله این است :

چوب (CK) عمود بر سطح زمین نصب شده است . این چوب در نقطه‌ای مانند B شکسته و سر آن در نقطهٔ A به زمین رسیده است . طول چوب (CK) معلوم و فاصلهٔ سر آن که به زمین رسیده از پای آن (AC) نیز معلوم است می‌خواهیم محل شکستگی چوب (یعنی در واقع طولهای BC و AB را) معلوم کنیم[۳].



(شکل ۷۲)

راه حل از استاد [۴] **-** دستوری را که استاد برای حل این مسئله داده است می‌توان به صورت زیر درآورد[۴]:

$$AB = \frac{CK}{۲} + \frac{(\frac{AC}{۲})^۲}{(\frac{CK}{۲})}$$

$$CB = \frac{CK}{۲} - \frac{(\frac{AC}{۲})^۲}{(\frac{CK}{۲})}$$

برهان – میلهٔ چوبی CK برسطح زمین عمود است . ایـن میله درنقطهٔ B می‌شکند و بدون آنکه دوقسمت آن از هم جدا شود خم می‌شود وسرآن در نقطهٔ A به زمین می‌رسد . می‌خواهیم طول BC را حساب کنیم .

دایرهٔ محیطی‌مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را رسم کرده کمان ABCرا در نقطهٔ D نصف می کنیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر AB و عمود DT را بر AC فرود می‌آوریم . چون عمود DT از وسط کمان ABC بروتر AC فرود آمده است از مرکز دایره می گذرد. پس نقطهٔ H فصل‌مشترك DT با AB (که قطردایره است) مرکز دایره می‌باشد .

دو مثلث قائم الزاویهٔ DEH و ATH (در حالت وتر ویك زاویهٔ حاده) متساویند و $DE = AT$ از طرف دیگر داریم : $\frac{AE}{ED} = \frac{DE}{EB}$

(و یا $EB = \frac{\overline{DE}^{2}}{AE}$ زیرا اگر نقطهٔ D را به نقاطA و B وصل کنیم مثلث ADB در رأس D قائم الزاویه و DE ارتفاع واردبروتر آن‌است) اما AE مساوی بـا نصف طول میله‌است (زیرا بنا به‌قضیهٔ اول داریم: $AE = \frac{AB + BC}{2}$ و $AB = BK$) بنابر این مقدار EB معلوم است (زیرا دیدیم که $EB = \frac{\overline{DE}^{2}}{AE}$ و $DE = AT = \frac{AC}{2}$ معلوم و $AE = \frac{CK}{2}$ نیز معلوم است پس داریم :

$$\left(EB = \frac{\left(\frac{AC}{2}\right)^{2}}{\frac{CK}{2}}\right.$$

بنابراین :

$$AB = AE + EB = \frac{CK}{۲} + \frac{(\frac{AC}{۲})^۲}{(\frac{CK}{۲})}$$

و

$$BC = CK - AB = \frac{CK}{۲} - \frac{(\frac{AC}{۲})^۲}{(\frac{CK}{۲})}$$

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ دهم :

(۱)- عل: ص۲۷و۲۸ - سوتر A : ص ۴۴و۴۵ و نیز صفحهٔ ۷۱ - چد : ص۸۱و۸۲ - چم: ص ۱۳۰و۱۳۱

(۲)- عنوان این مسئله درنسخهٔ«عل»چنین است:«مسئلةالخشبةلی وذکرهایجیء فی کتب الجبر والمقابلة»

(۳)- درحاشیهٔ صفحهٔ ۲۷ نسخهٔ «عل» عبارتی به‌عربی نوشته شده‌که معنی‌آن‌این‌است :

از روی این مسئله معلوم می شود‌که اگردر یك مثلث قائم الزاویه مجموع‌وترویك‌ضلع معلوم وضلع دیگرنیزمعلوم‌باشدمی‌توان‌وتروضلع دیگر آن را حساب‌کرد .

(۴)- حل‌این‌مسئله ازراه‌جبرفوق‌العاده ساده است. چه‌اگرطول‌معلوم چوب‌را $CK = h$ وفاصلهٔ AC را d بنامیم وفاصلهٔ محل شکستگی ازپای چوب‌یعنی‌فاصلهٔ BC راکه مجهول است x بگیریم ازمثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC معلوم می‌شودکه $AB^۲ = x^۲ + d^۲ = (h - x)^۲ = BK^۲$

و از آنجا

$$BC = x = \frac{h^۲ - d^۲}{۲h}$$

و این همان مقداری است که استاد آن را به صورت

$$BC = \frac{h}{۲} - \frac{\left(\frac{d}{۲}\right)^{۲}}{\left(\frac{h}{۲}\right)}$$ نوشته است.

(۵)ـ عبارت عربی این دستور در نسخهٔ «عل» چنین است:

«نضرب نصف البعد الذی بین موضع رأسه وبین اصله من الارض فی نفسه $\left(\left(\frac{AC}{۲}\right)^{۲}\right)$ ونقسم علی نصف طول الخشبة $\left(\frac{\overline{AC}^{۲}}{۲} : \frac{CK}{۲}\right)$ فما خرج فهو الذی ان نقصته من نصف طول الخشبه بقی مابقی منها قایماً علی وجه الارض (BC) وان زدته علی نصف طول الخشبه اجتمع مقدار ما انکسر (BK) و انعطف الی الارض»

مسئلهٔ یازدهم ـ مسئله‌ای است مربوط به علم هیئت که استاد آن را از مقالهٔ «فی التحلیل والتقطیع للتعدیل» تألیف خود (رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۶۱ تا ۶۶) استخراج و نقل کرده است.

عنوان مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: **«حل التعدیل و تقطیعه لنصف الفلک الخارج المرکزلی من کتابی المخصوص بهذا المعنی»**

راه‌حل همین مسئله در صفحات ۱۱۵ تا ۱۱۶ و برهان آن در صفحات ۱۳۴ تا ۱۳۶ از کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد نیز آمده است. و چنانکه در «بیرونی نامه» نوشته‌ام این قسمت از چاپ حیدرآباد مربوط به همان کتاب «فی التحلیل والتقطیع للتعدیل» تألیف استاد است که اشتباهاً جزو «استخراج الاوتار» چاپ شده است.

از ترجمهٔ حل این مسئله که مربوط به هیئت ومفصل است صرف نظر می کنیم.

رجوع کنید به: عل ص۲۸و۲۹- سوتر A: ص۴۵و۴۶ ونیز صفحهٔ ۷۱ (در آنجا ترجمهٔ آلمانی این مسئله و راه حل آن را خواهید یافت) - چد: ص۷۲تا۷۴- چم: ص۱۲۳ تا ۱۲۵)

مسئلهٔ دوازدهم- مسئله‌یی است مربوط به علم هیأت که استاد آن را از کتاب « فی المسائل المفیده و الجوابات السدیده فی علل زیج الخوارزمی» تألیف خود (رجوع کنید به «بیرونی نامه» ص۷۱) استخراج و نقل کرده است.

عنوان مسئله در نسخهٔ « عل » چنین است: « معرفة القطعة المنکسفة من احدالنیرین لی من کتابی فی المسائل المفیده و الجوابات السدیده فی علل زیج الخوارزمی».

از ترجمهٔ حل این مسئله که مربوط به علم هیأت و مفصل است صرف نظر می کنیم.

رجوع کنید به: عل:ص۲۹و۳۰- سوتر A: ص۴۶ تا ۴۸ونیز صفحهٔ ۷۱ (ترجمهٔ آلمانی مسئله و حل آن را در آنجا خواهید یافت)- چد:ص۷۵ تا ۷۸ - چم:ص۱۲۵ تا ۱۲۷.

مسئلهٔ سیزدهم- برهانی است بر یك عمل نجومی.

عنوان مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: « برهان عمل محمد بن الصباح فی رصد الشمس» ودر نسخه های چاپی چنین: « اقامة البرهان علی عمل محمد بن الصباح فی رصد المیل الاعظم».

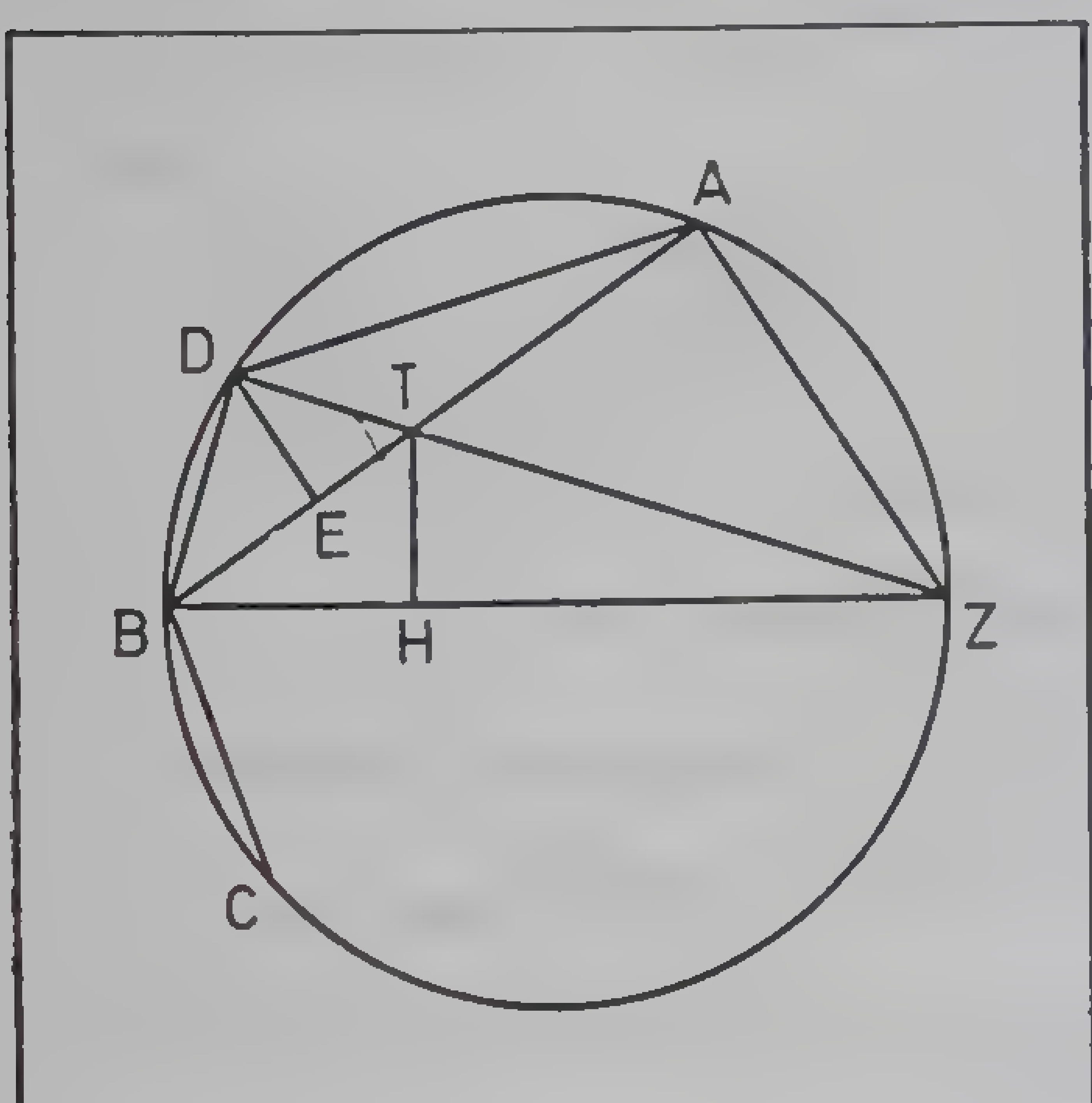
از ترجمهٔ حل این مسئله که مربوط به هیئت است صرف نظر می کنم.

رجوع کنید به: عل ص۳۱- سوتر A: ص۴۸ و ۴۹-چد: ص ۶۷ تا ۶۹ - چم : ص۱۱۹ و ۱۲۰

مسئلهٔ چهاردهم(۱)- ایـن مسئله به گفتهٔ استاد در محاسبهٔ ابعاد مورد نیاز واقع مـی‌شود واستاد آن را از مقالهٔ « فی‌دلالة الاثار العلویة علی‌الاحداث السفلیة» که‌خود نوشته بوده نقل کرده است(۲).

صورت مسئله این است:

دو مثلث ZAB و BDZ در رأسهای D و A قائم‌الزاویه هستند و در ضلع BZ مشترك مـی‌باشند . از نقطهٔ تقاطع دو خط ZD و AB کـه آن را T می‌نامیم عمود TH را بر BZ فـرود مـی‌آوریم. می‌خواهیم طول TH را به‌فرض آنکه اضـلاع دو مثلث مذکور معلوم باشند حساب کنیم.



(شکل ۷۳)

راه حل استاد(۳)- اگر به قطر BZ دایره‌ای رسم کنیم این دایره ازنقاط A و D می‌گذرد. نقطهٔ A را به نقطهٔ D وصل می‌کنیم. طول AD برحسب اضلاع دومثلث ZAB و BDZ معلوم است زیـرا چهار ضلعی ADBZ محاطی است و

(نظر به قضیهٔ بطلمیوس) داریم:

$$AB \times DZ = AZ \times DB + AD \times BZ$$

دراین تساوی طول همهٔ پاره‌خطها بنا به فرض معلوم است مگر طول AD.

بنابراین طول AD از تساوی فوق معلوم می‌شود.

اکنون روی دایرهٔ محیطی دو مثلث کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی با کمان $\widehat{AD}$ جدا می کنیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم. خط شکستهٔ ABC در دایره محاط است و از نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ADC}$ عمود DE بر AB فرود آمده است.

بنابراین نقطهٔ E وسط این خط شکسته است و (نظر به قضیهٔ دوم) داریم:

$$\overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$$

از تساوی فوق مقدار BC به‌دست می‌آید و بنابراین مقادیر AE و EB معلوم می‌شوند (وهمچنین می‌توان DE را ازروی مثلث قائم‌الزاویهٔ BED حساب کرد) وچون زاویهٔ BDT قائمه و DE عمود بر BT است داریم:

$$BE \times ET = \overline{DE}^2$$

از روی این تساوی مقدار ET به دست می‌آید و بنابراین مقدار $BT = BE + ET$ معلوم است.

ازطرف دیگر داریم:

$$\frac{TB}{TH} = \frac{ZB}{ZA}$$

وازروی این تناسب مقدار TH به دست می‌آید[۴].

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ چهاردهم:

(۱)- عل:ص۳۱- سوترA: ص۴۹ ونیزصفحهٔ ۷۲-چد:ص۷۹ و ۸۰ - چم : ص۱۲۸.

(۲)- عنوان این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است : «مسئلة احوج الیها معرفة الابعاد لی ، فی مقالتی فی‌دلالة الآثار العلویة علی الاحداث السفلیة »

(۳)- برای آنکه فهم این راه حل آسانتر باشد ، بدون آنکه در آن تغییری دهم بعضی‌ازجمله‌های‌آن را پس و پیش کرده‌ام .

(۴)- ظاهراً چون استاد می‌خواسته است این مسئله را با استفاده ازخاصیت خط منکسر محاط دردایره حل‌کند این‌راه‌حل را اختیارکرده است وگرنه می‌توان مسئله را از راه سادهٔ زیر حل کرد (رجوع کنید به سوتر A : ص۷۲):

دومثلث THB و ZAB متشابه‌اندوداریم:

$$\frac{HB}{HT}=\frac{AB}{AZ} \qquad (۱)$$

ونیزدو مثلث THZ و BDZ متشابه‌اند وداریم:

$$\frac{HZ}{HT}=\frac{DZ}{DB} \qquad (۲)$$

ازجمع کردن دو تساوی(۱)و(۲) عضو به عضوحاصل‌می‌شود:

$$\frac{HB+HZ}{HT}=\left(\frac{BZ}{HT}\right)=\frac{AB}{AZ}+\frac{DZ}{DB}=\frac{AB\times DB+AZ\times DZ}{AZ\times DB}$$

و از آنجا:

$$HT=\frac{BZ\times AZ\times DB}{AB\times DB+AZ\times DZ}$$

مسئلهٔ پانزدهم - مسئله‌ای است مربوط به علم هیئت که استاد آن‌را از کتاب «فی ابطال البهتان بایرادالبرهان علی اعمال الخوارزمی» تألیف خود (رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۷۱و۷۲) نقل کرده‌است.

عنوان مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة قوس رجوع الکواکب من کتابی فی ابطال البهتان بایراد البرهان علی اعمال الخوارزمی»

از ترجمهٔ حل این مسئله که مربوط به هیئت است صرف‌نظر می‌کنیم.

رجوع کنید به: عل: ص۳۲- سوتر A: ص۵۰ ونیز ص۷۲- چد: ص۷۸ و۷۹- چم ص۱۲۷و۱۲۸

***

در پایان این مسایل در نسخهٔ «عل» این عبارت آمده است:

« وقدیمکن الی وجود المطلوب سلوك طریق اسهل من الذی یتفق فی الوقت الّا ان الغرض فی صرفها الی امر واحد هوالا بانة عن محل خاصتین المذکورتین من هذه الصناعة والارشاد الی کیفیة التصرف فیها »

همین عبارت با اندك اختلافی در نسخهٔ چد (صفحهٔ ۸۴) ودر نسخهٔ چم (ص۱۳۳) نیز آمده است. خلاصهٔ معنی عبارت مذکور این است: «برای این مسایل راه حلهای ساده‌تری از آنچه ذکر کردیم وجود دارد. اما غرض ما فقط این بود که مورد استعمال خاصیتهای خط شکستهٔ محاط در دایره وچگونگی تصرف در آنهارا نشان دهیم»

ج-مسائل مربوط به محاسبهٔ وترهای دایره

مسائلی که از این به‌بعد می‌آید همه مربوط به‌محاسبهٔ وترهای دایره است. به‌همین‌دلیل‌استادبرای‌این‌قسمت از کتاب‌عنوان زیررا انتخاب کرده است:

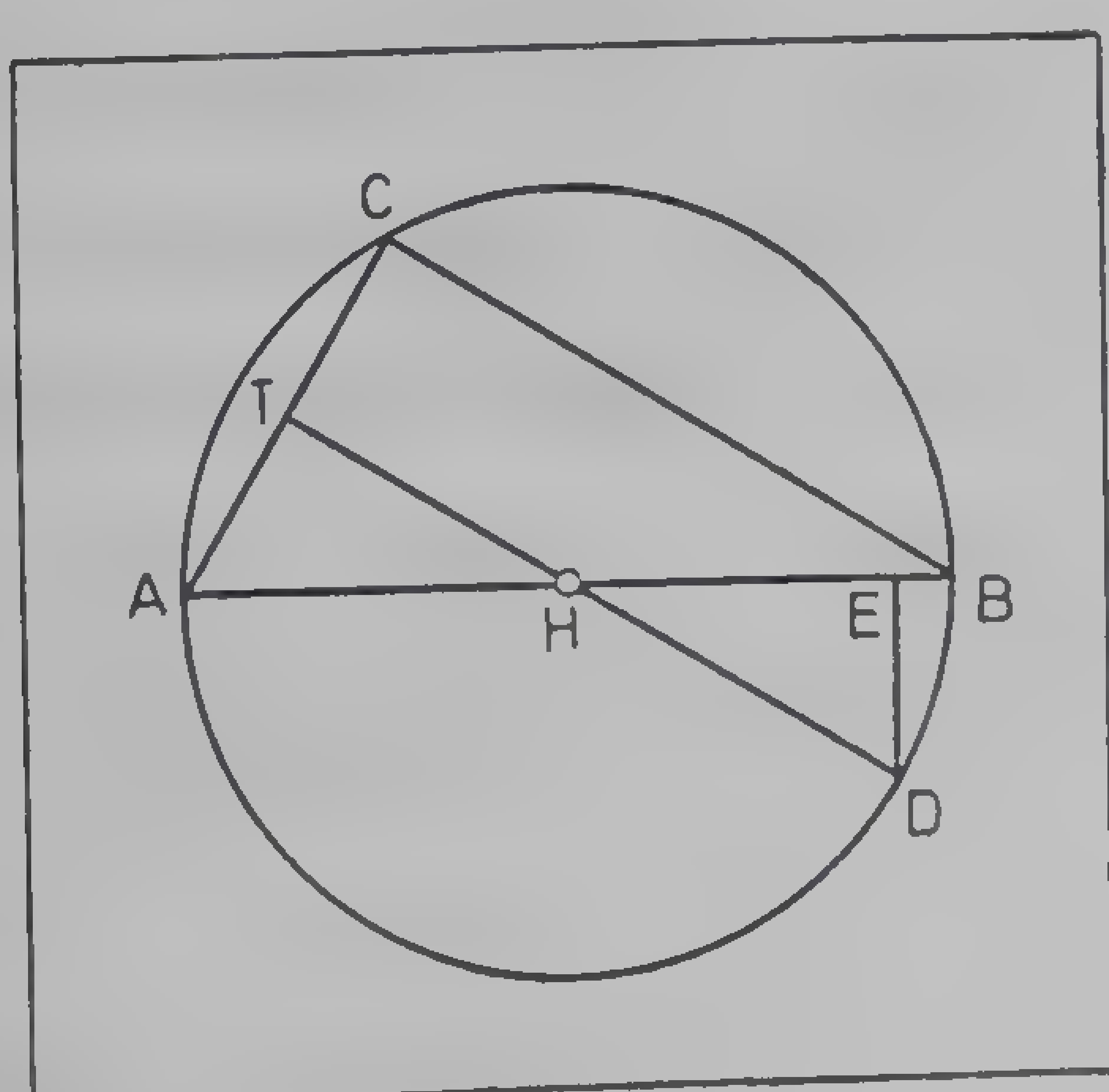
استعمال خاصیة الخط‌المنحنی فی استخراج أوتار القسی فی‌الدایرة المعلومة القطر

ودرآغاز این فصل افزوده است: « واذ قد تقدم ذکرما وقع به‌الوعد فی‌اول الکلام فانی اعود الی تمام الایجاد واقول...»

مسئلهٔ شانزدهم(۱)- محاسبهٔ وترمکمل کمانی که‌وترآن‌معلوم باشد(۲) (از استاد) (۳)

هر کمان از دایرهٔ به قطرمعلوم کـه وتر آن معلوم باشد وتر مکمل‌آن نیز معلوم است.

مثال: اگروترBC معلوم وقطردایره که‌آن را AB می‌نامیم نیز معلوم باشد وترACمعلوم است.



(شکل۷۴)

برهان(۴)**-** کمان $\widehat{ABC}$ را در نقطهٔ D نصف می کنیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر قطر AB و عمود HT (یعنی DT) را بر وتر AC فرود می آوریم و فصل مشترك DT را با قطر AB نقطهٔ H می نامیم. همانگونه که در مسئلهٔ دهم گفتیم (چون نقطهٔ D وسط کمان $\widehat{ABC}$ است DT عمود منصف وتر AC است و بنا براین از مرکز دایره می گذرد. پس) نقطهٔ H مرکز دایره است(۵).

دو مثلث قائم الزاویهٔ HED و HTA (در حالت وتر و یك زاویهٔ حاده) متساویند و بنا براین $ED = AT$

از طرف دیگر چون عمود DE بر قطر AB فرود آمده است داریم:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{ED}{EB} \qquad (۱)$$

(این مطلب با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ ADB که DE ارتفاع وارد بر وتر آن است واضح می باشد)

اما بنا به قضیهٔ اول داریم:

$$AE = \frac{AB + BC}{۲} \quad \text{و} \quad EB = \frac{AB - BC}{۲}$$

و دیدیم که $DE = AT$ بنا براین رابطهٔ (۱) را می توان چنین نوشت:

$$\overline{AT}^{۲} = \left(\frac{AB + BC}{۲}\right) \times \left(\frac{AB - BC}{۲}\right)$$

پس AT یعنی نصف وتر AC و بنابر این خود AC نیز معلوم است و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

(از آنچه گذشت دستور زیر برای محاسبهٔ وتر AC برحسب قطر AB و وتر BC به دست می‌آید):

دستور(۶): $$AC = ۲\sqrt{\left(\frac{AB+BC}{۲}\right)\left(\frac{AB-BC}{۲}\right)}$$

(استاد دراینجاافزوده است:) این دستور اگرچه طولانی است ولی (عملا) از دستور $AC = \sqrt{AB^۲ - BC^۲}$ آسان‌تر است(۷).

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ شانزدهم:

(۱)- عل: ص۳۲و۳۳- سوتر A: ص۵۱وص۷۲-چد: ص۸۷-چم: ص ۱۳۷و۱۳۸- ونیز رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه»: ص۳۰۶تا۳۰۸شمارهٔ ۶/۳۴ .

(۲)-عنوان این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «معرفةوتر تمام کل قوس معلومة الوتر الی نصف الدایرة **لی**» - اما درنسخه های چاپی «استخراج الاوتار» و درکتاب «قانون مسعودی» (جلداول صفحهٔ ۲۸۰) به‌جای کلمهٔ «تمام» کلمهٔ «تتمة» آمده و این درست‌تر است. زیرا تمام قوس همان است که امروز متمم قوس می‌نامیم (رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه»: صفحهٔ ۱۰۲ شمارهٔ ۳/۳۰) - ونیز رجوع کنیدبه‌یادداشت شمارهٔ ۲ ذیل مسئلهٔ بیستم.

(۳)- چنانکه دریادداشت فوق ملاحظه‌می‌شود استاد با افزودن کلمهٔ «لی» درنسخهٔ «عل» این راه‌حل را ازخود دانسته‌است.

(۴)- اگرقطردایره، که‌آن را AB می‌نامیم، و وتر BC معلوم‌باشد واضح است که می‌توان وتر AC یعنی وتر کمان مکمل کمان $\widehat{BC}$ را ازروی مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC به آسانی به دست آورد:

$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$ واحتیاجی به استدلالی که استاد ذکر کرده است نیست . ظاهراً وی خواسته است این مسئله را نیز با استفاده ازخاصیت خط شکستهٔ محاط در دایره (یعنی‌قضیهٔ‌اول)حل‌کند. علاوه‌براین خود وی درپایان حل‌مسئله دلیلی برای ترجیح این‌راه حل‌ذکرکرده وشاید به‌همین دلیل‌بوده است‌که درباب دوم ازمقالهٔ‌سوم‌کتاب «قانون مسعودی» نیزهمین‌راه‌حل راآورده‌است (رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه» :ص۳۰۶ به‌بعد)

(۵)ـ دراینجا درترجمهٔ عبارت‌متن‌عربی‌مختصرتغییری دادم تامطلب بهترمفهوم شود.

(۶)ـ مقایسه‌کنید با دستوری‌که استاد برای‌حل همین‌مسئله درکتاب «قانون‌مسعودی» ذکرکرده‌است («بیرونی‌نامه»:ص۳۰۶ شمارهٔ۶/۳۴).

(۷)ـ علت این‌سهولت این است‌که قدما محاسبات را دردستگاه‌شمار شصتگانی‌انجام می‌دادندوعمل‌ضرب(یا به‌قوهٔ۲ رساندن) درآن دستگاه‌مشکلتر ازعمل ضرب در دستگاه شمار دهگانی است. دستوری‌که استاد داده است علاوه‌برجمع وتفریق که‌آسان‌می‌باشدمشتمل بریک‌عمل‌ضرب ویک استخراج جذر است و حال آنکه برای به کاربردن دستور :

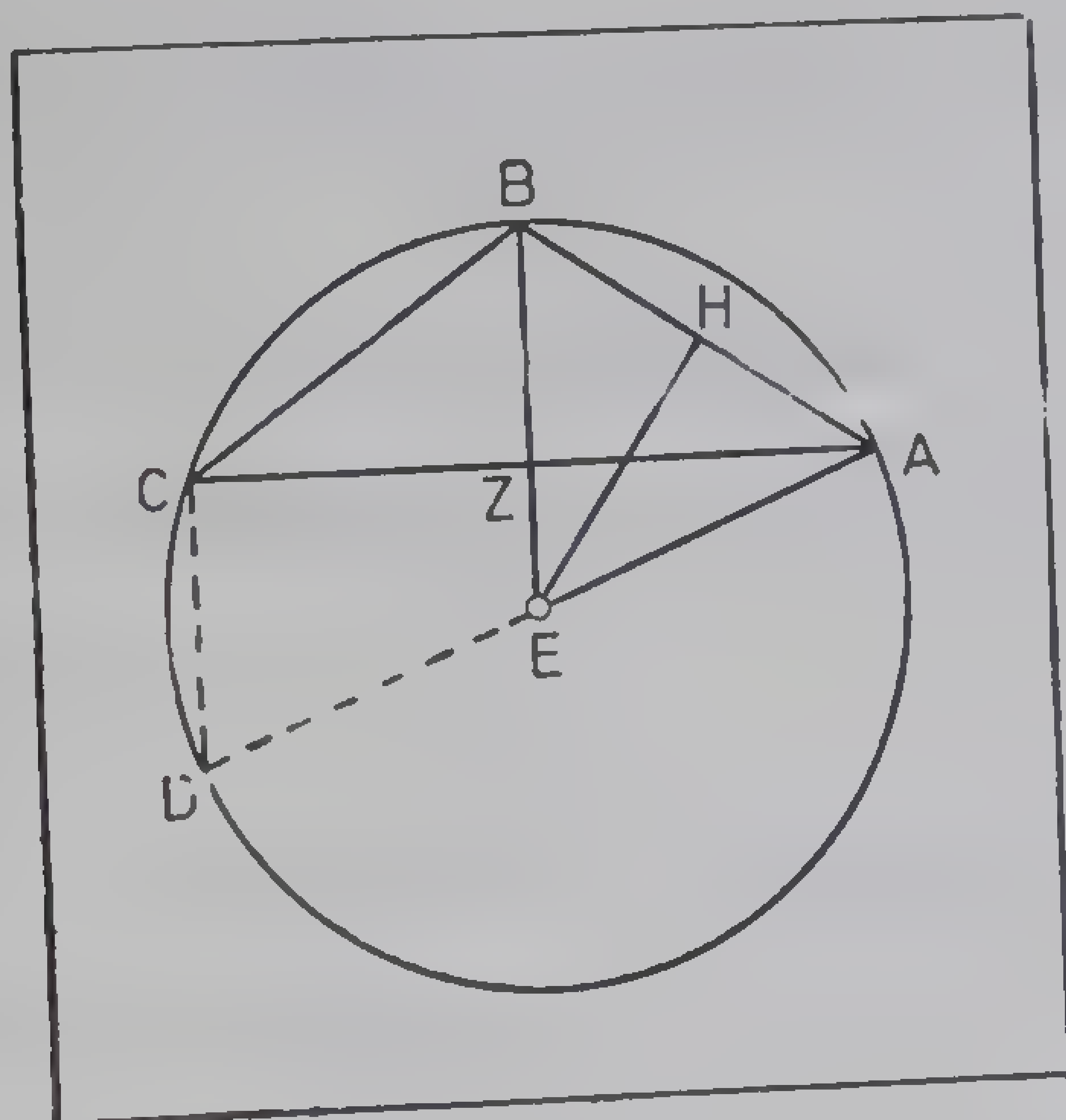
$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$ دوعمل‌ضرب(به‌قوهٔ۲رساندن) ویک‌عمل جذرلازم‌است (رجوع کنیدبه «سوترA»:ص۷۲ شمارهٔ۱۶) .

مسئلهٔ‌هفدهم(۱)ـ محاسبهٔ‌وتردوبرابر کمانی که وترآن‌معلوم باشد(۲).

(دربارهٔاین مسئله رجوع کنیدبه «بیرونی‌نامه»صفحات۳۰۸ تا۳۱۰)

هر کمان از دایرهٔ به قطرمعلوم که وتر آن معلوم باشد وتر دوبرابر آن نیز معلوم است .

مثال: اگر وتر AB معلوم و کمان $\widehat{BC}$ مساوی با کمان $\widehat{AB}$ باشد می‌خواهیم وتر AC را حساب کنیم.



(شکل ۷۵)

راه‌حل اول از استاد(۳) - شعاع EB را رسم کرده فصل مشترك آن را با AC نقطهٔ Z می‌نامیم و AE را وصل می کنیم. (نظر به‌قضیهٔ مربوط به مربع ضلع مقابل به‌زاویهٔ حادهٔ B در مثلث ABE) داریم:

$$\overline{AE}^{۲} = \overline{AB}^{۲} + \overline{BE}^{۲} - ۲BE \times BZ$$

و چون $AE = BE$ پس:

$$\overline{AB}^{۲} = ۲BE \times BZ \qquad (۱)$$

بنابراین BZ معلوم است. اما $EZ = EB - BZ$ پس EZ معلوم است.

از طرف دیگر EZ مساوی است با نصف وتر مکمل کمان $\widehat{AC}$ یعنی نصف CD (زیرا اگر قطر AED را رسم کنیم معلوم می‌شود که ZE نصف CD است و کمان $\widehat{CD}$

مکمل کمان $\widehat{AC}$ می باشد) بنابراین CD معلوم است (وازروی مثلث قائم الزاویهٔ ACD می‌توان AC راحساب کرد.)

به‌عبارت روشنتر: ازتساوف(۱) نتیجه‌می‌شود: $BZ = \frac{\overline{AB}^۲}{۲r}$

و از طرف دیگر

$$ZE = BE - BZ = r - \frac{\overline{AB}^۲}{۲r}$$

پس $$CD = ۲ZE = ۲\left(r - \frac{\overline{AB}^۲}{۲r}\right)$$

وازمثلث قائم‌الزاویه ACD نتیجه می‌شود:

$$\overline{AC}^۲ = \overline{AD}^۲ - \overline{CD}^۲$$

یعنی $$\overline{AC}^۲ = (۲r)^۲ - ۴\left(r - \frac{\overline{AB}^۲}{۲r}\right)$$

پس AC معلوم است

دستور (۴)ـ (عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ وترAC برحسب‌قطروو‌تر معلوم AB نوشته است(۵) می‌توان ، به فرض اینکه شعاع دایره r باشد ، به شکل زیرنوشت) :

$$AC = \sqrt{(۲r)^۲ - ۴\left(r - \frac{\overline{AB}^۲}{۲r}\right)^۲}$$

و رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۶).

راه‌حل دوم از استاد(۷)ـ از مرکز دایره یعنی E عمود EH را بر وتر معلوم AB فرود می‌آوریم. دوزاویهٔ BAZ و BEH متساویند وزوایای به‌رأس H و Z قائمه هستند پس دومثلث BAZ و BEH متشابهند و داریم:

$$\frac{AB}{AZ}=\frac{EB}{EH}$$

پس AZ معلوم است $\left(AZ = \frac{AB \times EH}{EB}\right)$ و دو برابر آن یعنی AC نیز معلوم می‌باشد.

دستور ـ (عبارتی راکه استاد برای محاسبهٔ AC برحسب قطر و وتر معلوم AB نوشته‌است(۸) می‌توان به‌فرض اینکه شعاع دایره r باشد به‌شکل زیر نوشت):

$$AC = \frac{۲\,AB\sqrt{\frac{(۲r)^۲-\overline{AB}^۲}{۴}}}{r}$$

و رجوع کنید به‌یادداشت شمارهٔ (۹)

یادداشتهای مربوط به‌مسئلهٔ هفدهم:

(۱)ـ عل: ص۳۳ـ سوتر A: ص۵۲ و ص۷۳ـ چد: ص۸۸ـ چم: ص۱۳۹

(۲)ـ عنوان این‌مسئله درنسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة وترضعف کل‌قوس معلومة الوتر لی» ـ درنسخه‌های چد وچم این مسئله و مسئلهٔ هجدهم یک‌جا با عنوان زیرآمده است: «معرفة وترضعف کل قوس معلومة الوتر ومعرفة نصف‌القوس المعلومة الوتروان لم تظهرفیه اثار هذه‌الخواص بالفعل» ـ مقصود ازجملهٔ «وان لم‌تظهرفیه ...» این‌است که، درحل‌این دو

مسئله ، قضایای مربوط به خاصیت خط شکسته محاط در دایره استفاده نشده است .

(۳)- اولاچنانکه دریادداشت فوق مشاهده‌می‌شود استاد با افزودن کلمهٔ**لی** به‌آخر عنوان مسئله (در نسخهٔ«عل») این‌راه‌حل را ازخود دانسته است.ثانیاً این راه‌حل‌درنسخه‌های‌چاپی‌نیست- درنسخه‌های‌چاپی فقط راه‌حل دوم هست .

(۴)- استاد دستور ساده‌تری برای حل این مسئله در کتاب « قانون مسعودی» بیان‌کرده است. رجوع کنیدبه«بیرونی‌نامه»صفحات۳۰۸ تا ۳۱۰.

(۵)- عبارت‌عربی این دستوروترجمهٔآن به‌زبان ریاضی‌این است:

حسابه : نضرب الوتر المعلوم فی‌نفسه $\left[\overline{AB}^{2}\right]$ ونقسم‌نصف‌مابلغ

علی نصف‌القطر $\left[\frac{\overline{AB}^{2}}{2r}\right]$ فما خرج نلقیه من نصف القطر $\left(r-\frac{\overline{AB}^{2}}{2r}\right)$

ثم نضعف مابقی و نضرب فی‌نفسه $\left[4\left(r-\frac{\overline{AB}^{2}}{2r}\right)^{2}\right]$ ونسقطمااجتمع

من مضروب القطر فی نفسه $\left[(2r)^{2}-4\left(r-\frac{\overline{AB}^{2}}{2r}\right)^{2}\right]$ و ناخذ

جذر ماتبقی $\left[\sqrt{(2r)^{2}-4\left(r-\frac{\overline{AB}^{2}}{2r}\right)^{2}}\right]$ فیکون وترضعف قوس

الوتر المفروض .

(۶) اگر زاویهٔ AEB را α بنامیم دستور محاسبهٔ AC را می‌توان به شکل زیرنوشت :

$$2r\sin\alpha=\sqrt{4r^{2}-4\left(r-\frac{4r^{2}\sin^{2}\frac{\alpha}{2}}{2r}\right)^{2}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4\sin^4\frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

یعنی همان دستور مثلثاتی $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ (سوتر A ؛ ص۷۳)

(۷)- استاد درآغاز این دستور (در نسخهٔ « عل ») نوشته است : «طریق آخر فی ذلك لی».

(۸)- عبارت عربی این دستور و ترجمهٔ آن به زبان ریاضی این است:

حسابه: نضرب الوتر المعلوم فی نفسه $\left[\overline{AB}^2\right]$ ونلقی ما اجتمع من مضروب القطر فی نفسه $\left[(2r)^2 - \overline{AB}^2\right]$ وناخذ جذر ربع مابقی

$$\left[\sqrt{\frac{(2r)^2 - \overline{AB}^2}{4}}\right]$$

و نضربه فی الوتر المعلوم و نقسم المبلغ علی نصف القطر

$$\left[\frac{AB\sqrt{\frac{(2r)^2 - \overline{AB}^2}{4}}}{r}\right]$$

فما خرج من القسمة نضعفه فیحصل وتر ضعف قوس الوتر المفروض.

(۹)- اگر زاویهٔ AEB را α بنامیم دستور محاسبهٔ AC را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$2r\sin\alpha = \frac{4r\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{r^2 - r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{r}$$

$$= \frac{4r^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{r}$$

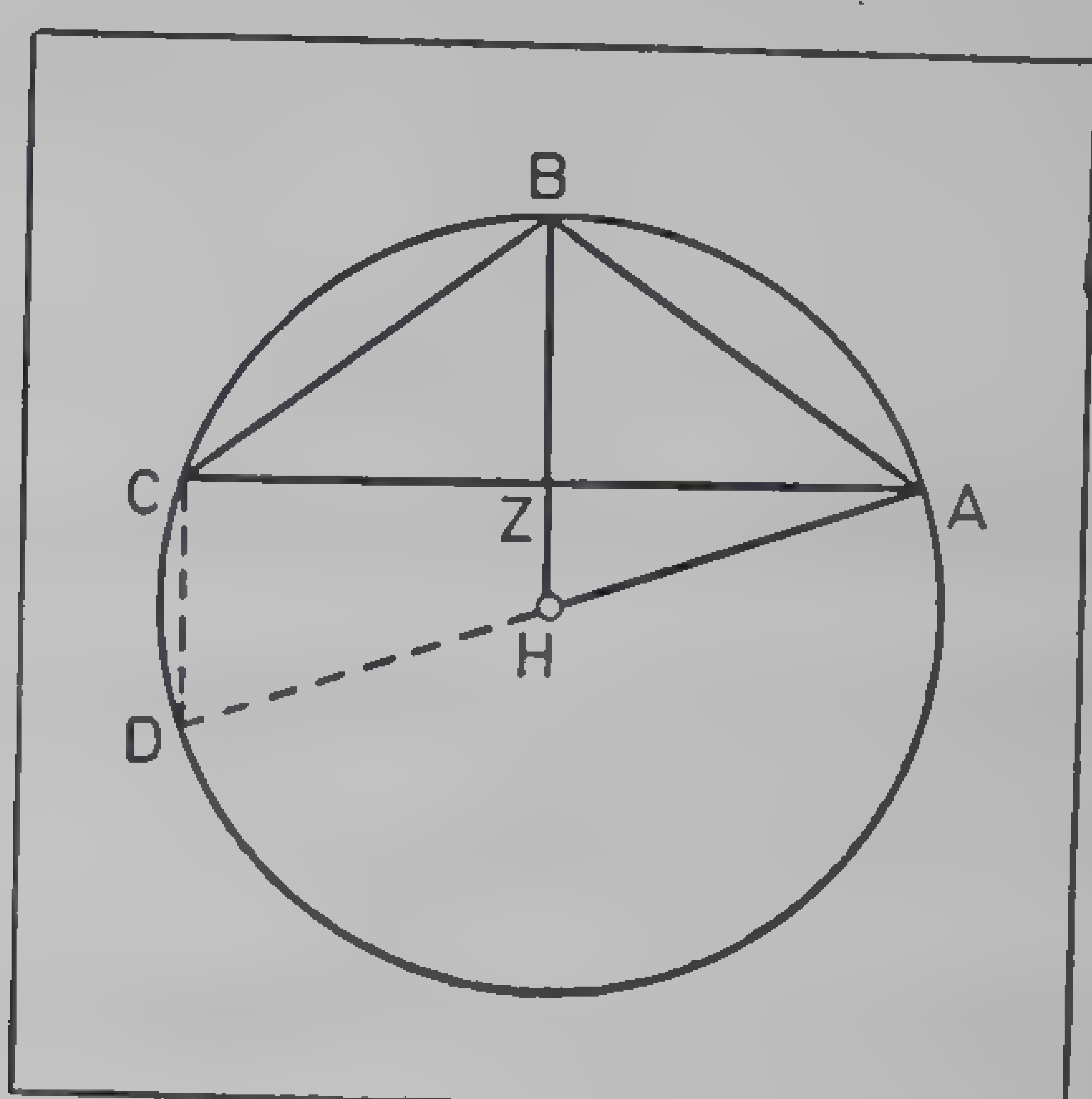
و یا
$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

مسئلهٔ هجدهم(۱)ــ محاسبهٔ وتر نصف کمانی که وتر آن معلوم باشد(۲).

(دربارهٔ این مسئله نیز رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۳۱۰ تا ۳۱۲)

هر کمان از دایرهٔ به قطر معلوم که وتر آن معلوم باشد وتر نصف آن نیز معلوم است.

مثال: اگر وتر AC معلوم و کمان $\widehat{AB}$ مساوی با کمان $\widehat{BC}$ باشد می‌خواهیم وتر AB را حساب کنیم.



(شکل ۷۶)

راه‌حل اول از استاد[۳]- شعاع EB را رسم کرده فصل مشترک آن را با وتر AC نقطهٔ Z می‌نامیم و AE را رسم می کنیم. (نظر به قضیهٔ مربوط به مربع ضلع مقابل به زاویهٔ حادهٔ E در مثلث AEB) داریم:

$$\overline{AB}^۲ = \overline{AE}^۲ + \overline{BE}^۲ - ۲BE \times ZE \qquad (۱)$$

وچون AE و BE (شعاعهای دایره) معلوم و ZE نیز که نصف وتر مکمل کمان $\widehat{AC}$ است معلوم می‌باشد (رجوع کنید به مسئلهٔ هفدهم) پس AB معلوم است .

دستور [۴]- عبارتی که استاد برای محاسبهٔ وتر AB برحسب قطر دایره و وتر معلوم AC نوشته است در نسخهٔ «عل» ناقص است وصحیح آن را به فرض اینکه شعاع دایره r باشد می‌توان چنین نوشت[۵]:

$$AB = \sqrt{\frac{(۲r)^۲}{۲} - (۲r)\sqrt{\frac{(۲r)^۲ - (\overline{AC})^۲}{۴}}}$$

و رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (٦)

راه‌حل دوم از استاد[۷]- اگر پاره‌خط ZE را که نصف وتر مکمل قوس $\widehat{AC}$ است از شعاع EB کم کنیم BZ باقی‌می‌ماند (پس BZ معلوم‌است) وداریم :

$$\overline{AB}^۲ = \overline{AZ}^۲ + \overline{BZ}^۲$$

(وچون AZ که نصف AC است نیز معلوم‌است پس AB معلوم می باشد)

دستور-(عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ AC برحسب قطر ووتر معلوم AC

نوشته‌است(۸)می‌توان به‌صورت زیر درآورد) :

$$AB=\sqrt{\left(\frac{2r-\sqrt{(2r)^2-\overline{AC}^2}}{2}\right)^2+\frac{\overline{AC}^2}{4}}$$

ورجوع کنید به‌یادداشت شماره(۹)

یادداشت‌های مربوط به مسئلهٔ هجدهم :

(۱)- عل :ص ۳۳و۳۴-سوتر A :ص۵۲و۵۳ ویادداشت شمارهٔ ۱۸ ص۷۳- چد:ص۸۸ و۸۹-چم: ص۱۴۰ .

(۲)- عنوان این‌مسئله درنسخهٔ«عل»چنین‌است:«معرفة وترنصف کل قوس معلومة الوترلی»- ورجوع کنید به‌یادداشت‌شمارهٔ۲مسئلهٔ هفدهم.

(۳)- اولا چنانکه دریادداشت شمارهٔ۲مشاهده‌می‌شود استادباافزودن کلمهٔ لی به‌آخر عنوان مسئله (در نسخهٔ «عل») این راه حل را از خود دانسته است .

ثانیاً این راه‌حل درنسخه‌های چاپی‌نیست ـ درنسخه‌های‌چاپی‌فقط راه حل‌دوم هست .

(۴)- استاد دستور ساده تری برای حل این مسئله درکتاب «قانـون مسعودی»بیان‌کرده است. رجوع کنیدبه«بیرونی‌نامه» صفحات ۳۱۰ تا۳۱۲.

(۵)- رجوع کنید به‌سوترA: ص۵۳ (یادداشت شمارهٔ ۳ ذیل‌صفحه)

(۶)- اگر زاویهٔ AEB را α بنامیم دستور محاسبهٔ ABرامی‌توان به‌شکل زیرنوشت :

$$2r\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-r^2\sin^2\alpha}}=\sqrt{2r^2-2r^2\cos\alpha}$$

ویا

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

(۷)ـ استاد درآغازاین دستور (درنسخهٔ «عل») نوشته‌است: «طریق آخرفی ذلك‌لی.»

(۸)ـ عبارت‌عربی‌این دستور (پس‌ازتصحیح) و ترجمهٔ آن به‌زبان‌ریاضی این است:

حسابه: نضرب الوتر المعلوم فی‌نفسه $(\overline{AC}^{۲})$ و نلقی ما اجتمع من مضروب القطر فی‌نفسه $\left[(۲r)^{۲} - \overline{AC}^{۲}\right]$ و ننقص جذر مایبقی من القطر $\left[۲r - \sqrt{(۲r)^{۲} - \overline{AC}^{۲}}\right]$ ونضرب نصف مایبقی فی مثله

$$\left[\left(\frac{۲r - \sqrt{(۲r)^{۲} - \overline{AC}^{۲}}}{۲}\right)^{۲}\right]$$

و نزیدالمبلغ علی مضروب نصف الوتر المعلوم فی‌نفسه

$$\left[\left(\frac{۲r - \sqrt{(۲r)^{۲} - \overline{AC}^{۲}}}{۲}\right)^{۲} + \frac{\overline{AC}^{۲}}{۴}\right]$$

فما بلغ ناخذ جذره فیکون وترالنصف‌المطلوب.

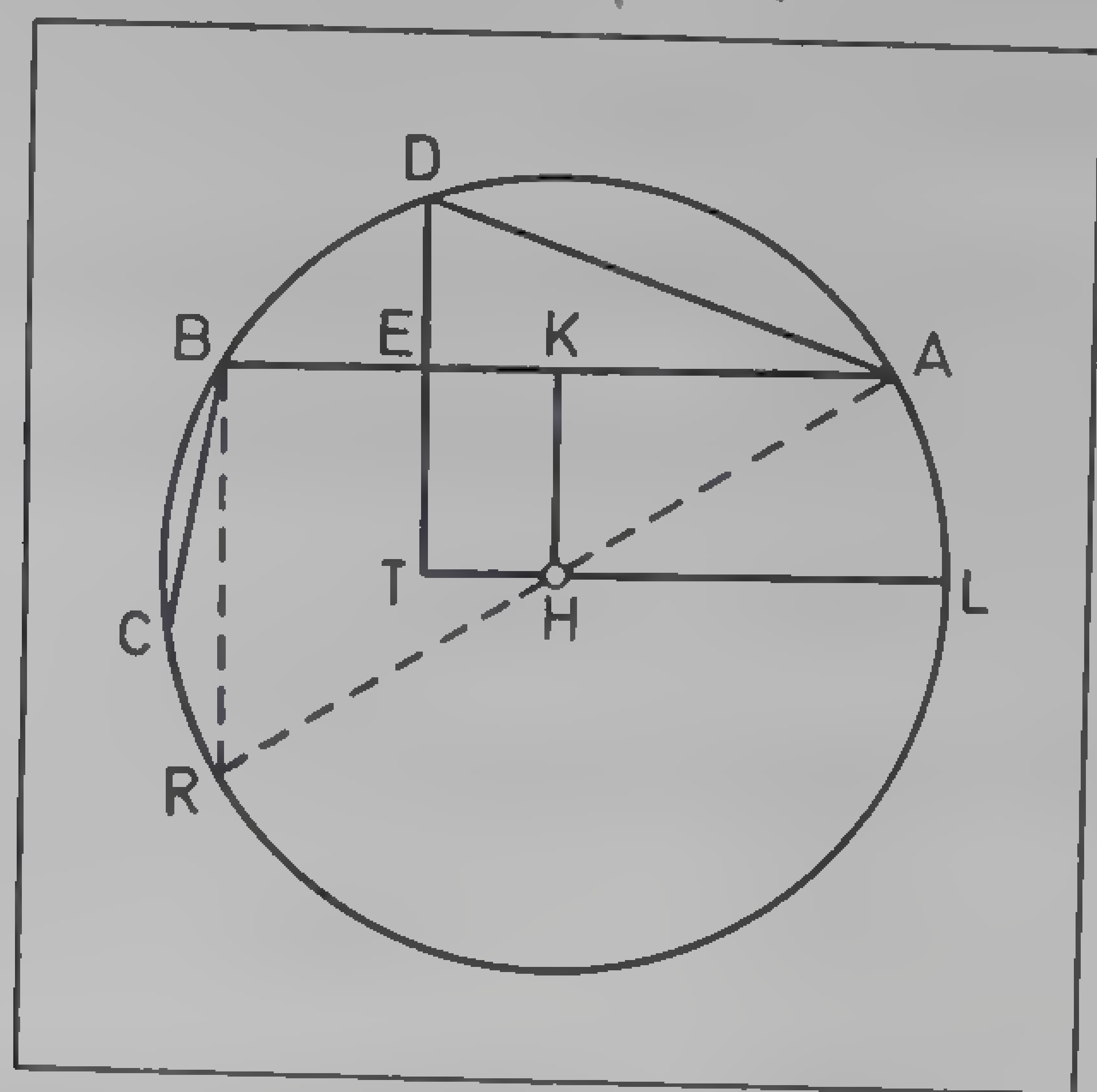
(۹)ـ ایـن دستور نیز مانند دستور اول به صورت رابطهٔ مثلثاتی زیر درمی‌آید:

$$\sin\frac{\alpha}{۲} = \sqrt{\frac{۱ - \cos\alpha}{۲}}$$

مسئلهٔ نوزدهم(۱)ـ محاسبهٔ وترنصف‌مجموع‌دوکمان‌که وترهای‌آنها معلوم‌باشد(۲).

هردو کمان از دایرهٔ به قطر معلوم که وترهای آنها معلوم باشد وتـر نصف مجموعشان نیز معلوم است.

مثال: اگر وترهای AB و BC معلوم باشند و کمان $\widehat{AD}$ مساوی با کمان $\widehat{DC}$ باشد می‌خواهیم وتر AD را حساب کنیم(۳).



(شکل ۷۷)

راه حل از استاد(۴)ـ از نقطهٔ D (که وسط کمان ABC است) عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم و از مرکز دایره که آن‌را H می‌نامیم عمودهای HT و HK را (به‌ترتیب بر خط راست DE و خط راست AB) رسم می کنیم.

واضح است که HK نصف وتر مکمل کمان $\widehat{AB}$ است و TE با آن مساوی است. (برای اینکه این مطلب روی شکل دیده شود کافی است قطر AHR را رسم کرده ملاحظه کنیم که HK نصف BR است و کمان $\widehat{BR}$ مکمل کمان $\widehat{AB}$ می باشد ـ تساوی TE = HR نتیجهٔ مستطیل بودن شکل EKHT است) پس TE معلوم است.

از طرف دیگر داریم: $AE = \frac{AB+BC}{۲}$ (بنا به‌قضیهٔ اول) پس AE معلوم است و $KE = \frac{BC}{۲}$ (زیرا $KE = AE - AK = AE - \frac{AB}{۲} = \frac{BC}{۲}$) پس KE هم معلوم است.

اکنون مطابق با شکل پاره خط THL را رسم می کنیم. واضح است که:

$$\overline{DT}^2 = TL(\text{قطر} - TL) \qquad \text{(قوت نقطهٔ T نسبت به دایره)}$$

(و چون TH و HL «شعاع» معلوم‌است) پس DT هم معلوم است.

اما DE = DT − TE (وچون DT و TE معلوم است) پس DE معلوم است

وچون AE نیز معلوم است پس AD معلوم می باشد.

دستور - (عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ AD یعنی وتر نصف مجموع دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ نوشته است(۵) می‌توان به صورت زیر درآورد) :

ابتدا DE را حساب می کنیم :

$$DE = \sqrt{\left(r + \frac{BC}{۲}\right)\left(r - \frac{BC}{۲}\right)} - \sqrt{\frac{۴r^۲ - \overline{AB}^۲}{۴}}$$

وسپس AD را به دست می‌آوریم؛

$$AD = \sqrt{\overline{DE}^۲ + \left(\frac{AB + BC}{۲}\right)^۲}$$

ورجوع کنید به‌یادداشت شمارهٔ (۶)

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ نوزدهم:

(۱)- عل: ص ۳۴ و ۳۵- سوتر A : ص ۵۳ و ۵۴ و ص ۷۳ و ۷۴- چد : ص ۹۲ و ۹۳- چم: ص ۱۴۴.

(۲)- عنوان عربی این‌مسئله درنسخهٔ «عل» چنین‌است :«**معرفة وتر نصف مجموع قوسین‌معلومتی الوترین لمی**»

(۳)- درنسخه‌های‌چاپی درابتدای حل‌این‌مسئله‌عبارت زیرآمده است (و این عبارت در نسخهٔ «عل» نیست) : « **متی ماعلم وترمجموعهما عرف**

بالتنصیف المتقدم وترنصف مجموعها ... » . یعنی هرگاه وترمجموع دو کمان معلوم باشد می‌توان با استفاده ازمسئلهٔهجدهم وترنصف مجموعشان را حساب کرد ...» (ورجوع کنید به آنچه در پایان یادداشت شمارهٔ (۶) نوشته‌ام .

(۴)- چنانکه دریادداشت شمارهٔ(۲) مشاهده می‌شود استادباافزودن کلمهٔ **لی** به آخرعنوان مسئله (درنسخهٔ «عل») این راه حل را ازخود دانسته است .

(۵)- عبارت عربی این دستور وترجمهٔآن به زبان ریاضی این است:

حسابه : نزید نصف اصغر الوترین علی نصف القطر $\left(r+\frac{BC}{۲}\right)$

وننقصه ایضامنه $\left(r-\frac{BC}{۲}\right)$ ثم نضرب (درنسخهٔ «عل» ننقص نوشته شده وغلط است) الزاید فی‌الناقص و نحفظجذرالمجتمع :

$$\left[\sqrt{\left(r+\frac{BC}{۲}\right)\left(r-\frac{BC}{۲}\right)}\right]$$ وننقص مضروب اعظم الوترین فی نفسه

من مضروب القطرفی نفسه وناخذ جذر ربع مایبقی. $\left(\sqrt{\frac{۴r^۲-AB^۲}{۴}}\right)$

فنلقیه‌من‌المحفوظ $$\left[\sqrt{\left(r+\frac{BC}{۲}\right)\left(r-\frac{BC}{۲}\right)}-\sqrt{\frac{۴r^۲-AB^۲}{۴}}\right]$$

(این مقدارمساوی‌با DE است و ازاین به بعد به جای آن DE را به‌کار خواهم برد) ثم نضرب الباقی فی‌نفسه $(\overline{DE}^۲)$ و نزیده علی مضروب نصف المجموع الوترین فی‌نفسه وناخذ جذر الجمله:

$$\left[\sqrt{DE^۲+\left(\frac{AB+BC}{۲}\right)^۲}\right]$$

فیکون وتر نصف مجموع القوسین المعلومتی الوترین .

(۶)- اگر کمان $\widehat{AB}$ را α و کمان $\widehat{BC}$ را β بنامیم می‌توان دستور محاسبهٔ ADرا به‌صورت یک‌تساوی‌مثلثاتی درآورد (← سوتر A: ص۷۴):

$$AB = ۲r\sin\frac{\alpha}{۲} \quad \text{و} \quad \sqrt{r^۲ - \frac{\overline{AB}^۲}{۴}} = r\cos\frac{\alpha}{۲}$$

$$BC = ۲r\sin\frac{\beta}{۲} \quad \text{و} \quad \sqrt{r^۲ - \frac{\overline{BC}^۲}{۴}} = r\cos\frac{\beta}{۲}$$

بنابراین :

$$DE = r\cos\frac{\beta}{۲} - r\cos\frac{\alpha}{۲}$$

و ازآنجا :

$$AD = \sqrt{\left(r\cos\frac{\beta}{۲} - r\cos\frac{\alpha}{۲}\right)^۲ + \left(r\sin\frac{\alpha}{۲} + r\sin\frac{\beta}{۲}\right)^۲}$$

و یا :

$$۲r\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{۴}\right) = \sqrt{۲r^۲ - ۲r^۲\left(\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲} - \sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\right)}$$

و یا

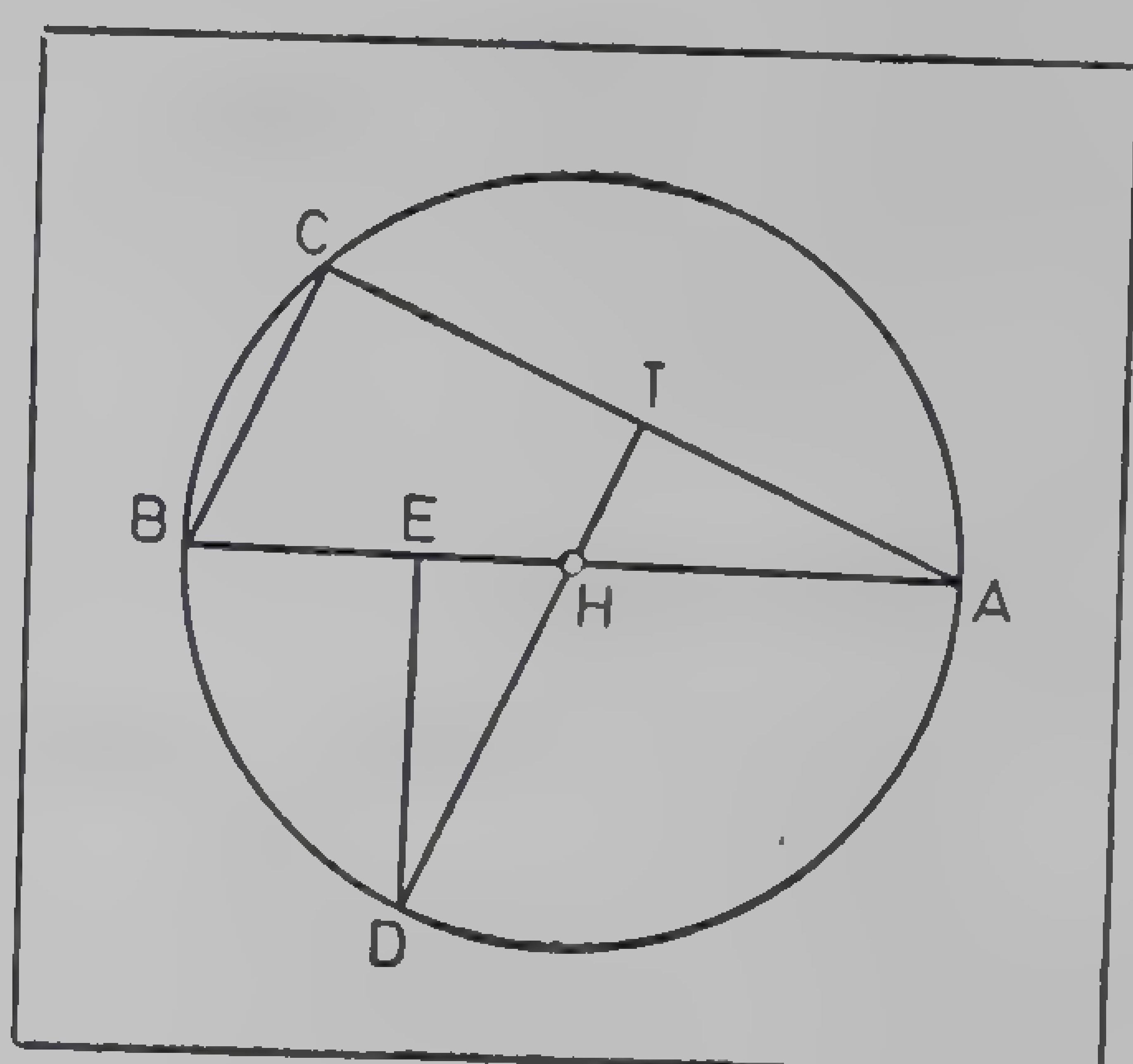
$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{۴}\right) = \sqrt{\frac{۱ - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)}{۲}}$$

واین‌همان دستور مثلثاتی $\sin\frac{A}{۲} = \sqrt{\frac{۱-\cos A}{۲}}$ است که در مسئلهٔ هجدهم به آن رسیدیم؟. به‌همین دلیل است که استاد این مسئله را در کتاب «قانون‌مسعودی» ذکرنکرده‌است. زیرا-رآن‌کتاب‌بنای‌وی‌براختصار بوده وفقط دستورهای مهم‌راشرح داده‌است.

مسئلهٔ بیستم(۱) ـ محاسبهٔ وتر مکمل کمانی که وتر آن معلوم است هرگاه مجموع قطر دایره ووتر مکمل کمان معلوم باشد ولی هرکدام از آنها به تنهایی مجهول باشد(۲) .

این مسئله عملا مورد استعمالی برای محاسبهٔ وترهای دایره ندارد. ظاهراً استاد خواسته است با حل این مسئله نشان دهد که خاصیت خط شکستهٔ محاط در دایره (= قضیهٔ اول) چگونه موجب سهولت حل بعضی از مسایل می‌شود.

راه حل از استاد(۳)ـ این مسئله به مسئلهٔ چوب (مسئلهٔ دهم) بازمیگردد . فرض می کنیم که وتر کمان $\widehat{AC}$ معلوم و نیز مجموع وتر کمان $\widehat{CB}$، که مکمل کمان $\widehat{AC}$ است، با قطر AB معلوم باشد اما AB و BC هریك به تنهایی مجهول باشند (ومی‌خواهیم وتر BC را حساب کنیم) .



(شکل ۷۸)

وسط کمان $A\widehat{B}C$ را نقطهٔ D می‌نامیم واز نقطهٔ D عمود DE را بر (قطر) AB و عمود DT را بر AC فرود می‌آوریم و فصل مشترك آن را با AB نقطهٔ H می‌نامیم. همچنانکه قبلا ثابت کردیم (درمسئلهٔ شانزدهم) نقطهٔ H مرکز دایره است و $AT = DE$ (نظر به تساوی دو مثلث DEH و ATH) وداریم:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{DE}{BE}$$

(زیرا DE ارتفاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD است ـ که دوضلع آن روی شکل رسم نشده است.)

ویا:
$$\frac{\frac{1}{2}(AB + BC)}{DE} = \frac{DE}{BE}$$

(چون $DE = AT = \frac{AC}{2}$ معلوم و نیز $\frac{1}{2}(AB + BC)$ معلوم است)

بنابراین ازتساوی فوق BE معلوم می‌شود: $\left(BE = \dfrac{\overline{AC}^2}{\frac{1}{2}(AB + BC)} \right)$

و داریم:
$$AE + EB = AB = \text{قطر}$$

و
$$AE - EB = BC$$

(بنابراین قطر AB و وتر BC به دست می‌آید)

دستور ـ (عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ قطر و وتر BC نوشته‌است[۴] می‌توان به صورت زیر درآورد. برای آنکه این دستور ساده شود مجموع معلوم

AB + BC را s و طول معلوم وتر AC را l می‌نامیم. دراین صورت):

$$\text{قطر} = AB = \frac{s}{۲} + \frac{l^{۲}}{\left(\frac{s}{۲}\right)}$$

و

$$BC = \frac{s}{۲} - \frac{l^{۲}}{\left(\frac{s}{۲}\right)}$$

یادداشت‌های مربوط به مسئلهٔ بیستم:

۱- عل: ص۳۵- سوتر A: ص۵۴ و ۵۵ - چد: ص۱۰۱و۱۰۲ - چم: ص۱۵۵ تا ۱۵۷.

(۲)- صورت این مسئله درنسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة وتر تمام قوس معلومة الوتر الی نصف الدایرة اذا کان مجموع قطر الدایرة و وتر التمام معلوماً و کل واحد منهما بانفراده مجهولا لی»

در نسخه‌های چاپی به‌جای «وتر تمام قوس» اصطلاح «وتر تتمهٔ قوس» به کار رفته که درست‌تر است (رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ ۲ ذیل مسئلهٔ شانزدهم).

(۳)- چنانکه در یادداشت شمارهٔ (۲) دیده می‌شود استاد با افزودن کلمهٔ لی در پایان صورت مسئله (در نسخهٔ «عل») این راه حل را از خود دانسته است.

(۴)- عبارت عربی این دستور و ترجمهٔ آن به‌زبان ریاضی این است: حسابه: نضرب الوتر المعلوم فی نفسه $(\overline{AC})^{۲}$ و نقسم ما بلغ علی نصف مجموع القطر و وتر تمام قوس الوتر المعلوم:

$$\left[\frac{AC^{۲}}{\frac{۱}{۲}(AB + BC)}\right]$$

فما خرج (یعنی مقدار BE) فهو الذی ان زدناه علی ذلك النصف المقسوم علیه اجتمع القطر :

$$\left[AB = \frac{۱}{۲}(AB+BC) + \frac{\overline{AC}^{۲}}{\frac{۱}{۲}(AB+BC)}\right]$$

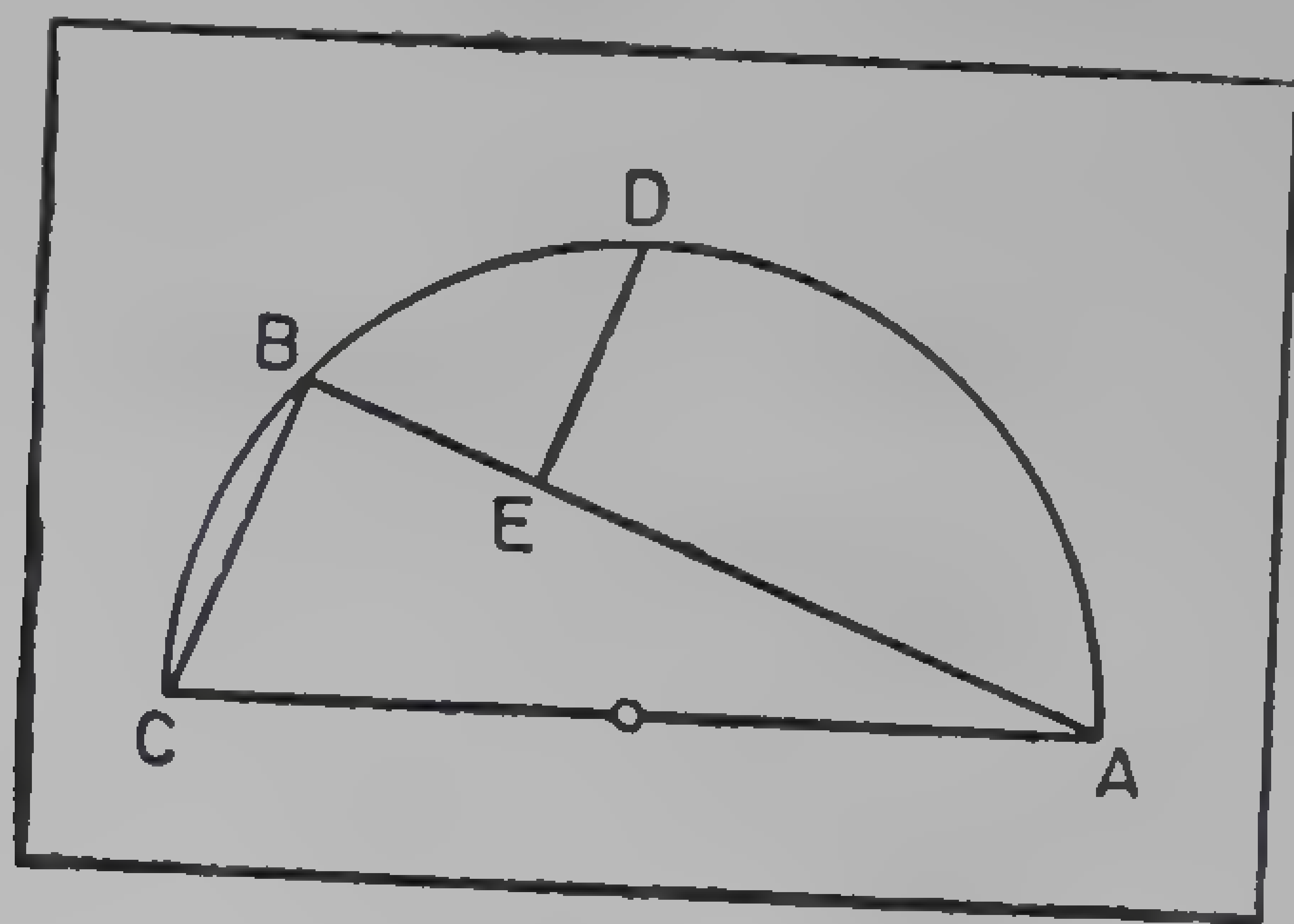
و ان نقصناه منه حصل وتر تمام قوس الوتر المعلوم الی نصف الدایرة :

$$\left[BC = \frac{۱}{۲}(AB+BC) - \frac{\overline{AC}^{۲}}{\frac{۱}{۲}(AB+BC)}\right]$$

مسئلهٔ بیست ویکم(۱) ـ محاسبهٔ وتر یك کمان و وتر کمان مکمل آن به فرض آنکه قطر دایره معلوم و مجموع دو وتر مذکور نیز معلوم باشد ولی آن دو وتر جداگانه معلوم نباشند (۲).

این مسئله مانند مسئلهٔ بیستم مورد استعمال عملی برای محاسبهٔ وترهای دایره ندارد. با این حال ازاین جهت جالب توجه است که حل آن به حل یك دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی منجرمی‌شود که به‌وسیلهٔ خاصیت اول خط شکستهٔ محاط در دایره (= قضیهٔ اول) بسیار آسان حل می‌شود. رجوع کنیدبه یادداشت شمارهٔ(۶).

راه حل اول از استاد(۳)ـ مثلا فرض می کنیم قطر AC معلوم ومجموع دو وتر AB و BC نیز معلوم باشد و می‌خواهیم هریك از این دو وتر را حساب کنیم.



(شکل ۷۹)

کمان $A\widehat{B}C$ را در نقطهٔ D نصف می‌کنیم و از نقطهٔ D عمود DE را بر AB (وتر بزرگتر) فرود می‌آوریم. چون خط شکستهٔ ABC در نقطهٔ E نصف می‌شود و AB بنا به فرض بزرگتر از BC است داریم[۴]:

$$AB^۲ + \overline{BC}^۲ - ۲\overline{AE}^۲ + ۲\overline{EB}^۲ \quad (۱)$$

از طرف دیگر (در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC) داریم:

$$\overline{AC}^۲ = \overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲ \quad (۲)$$

از تساوی (۱)و(۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}\overline{AC}^۲ = \overline{AE}^۲ + \overline{EB}^۲ \quad (۳)$$

اما $\overline{AE}^۲$ معلوم‌است، زیرا $\frac{AB + BC}{۲} = AE$ ، بنابر این EB از روی تساوی (۳) که در آن $AC^۲$ نیز معلوم است به دست می‌آید. حال اگر EB را با AE جمع کنیم AB حاصل می‌شود و اگر EB را از AE کم کنیم BC به دست می‌آید.

و این‌همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

دستور ـ (عبارتی را که استاد برای محاسبهٔ AB و BC نوشته است[۵] می‌توان به صورت زیر درآورد ـ برای آنکه این دستور ساده شود مجموع معلوم AB + BC را s و طول قطر دایره را که نیز معلوم است d می‌نامیم دراین صورت) :

$$AB = \frac{s}{۲} + \sqrt{\frac{d^۲}{۲} - \left(\frac{s}{۲}\right)^۲}$$

و

$$BC = \frac{s}{۲} - \sqrt{\frac{d^۲}{۲} - \left(\frac{s}{۲}\right)^۲}$$

تبصره ـ استاد دردنبال این دستور (درنسخهٔ «عل») راه‌حل دیگری از خود ذکر کرده و درآغاز آن نوشته است : «وجه‌آخر فی‌معرفة ذلك‌لی». ولی در واقع این همان راه اول است که درآن رابطهٔ (۳) را به صورت:

$\overline{AC}^۲ = ۲\overline{AE}^۲ + ۲\overline{EB}^۲$ نوشته است و ازروی آن $۲\overline{EB}^۲$ و درنتیجه EB را استخراج کرده است .

جالب توجه است که در نسخه‌های چاپی این راه حل از راه حل‌اول جدا نشده وفقط مطلب فوق به صورت تبصره‌ای نوشته شده و با جملهٔ « وان شئنا ... » یعنی « و اگر بخواهیم ... » شروع می‌شود .

(رجوع کنید به‌چد: ص۱۰۳ سطر دوم به‌بعد ـ چم: ص ۱۵۸ سطر چهارم به‌بعد.)

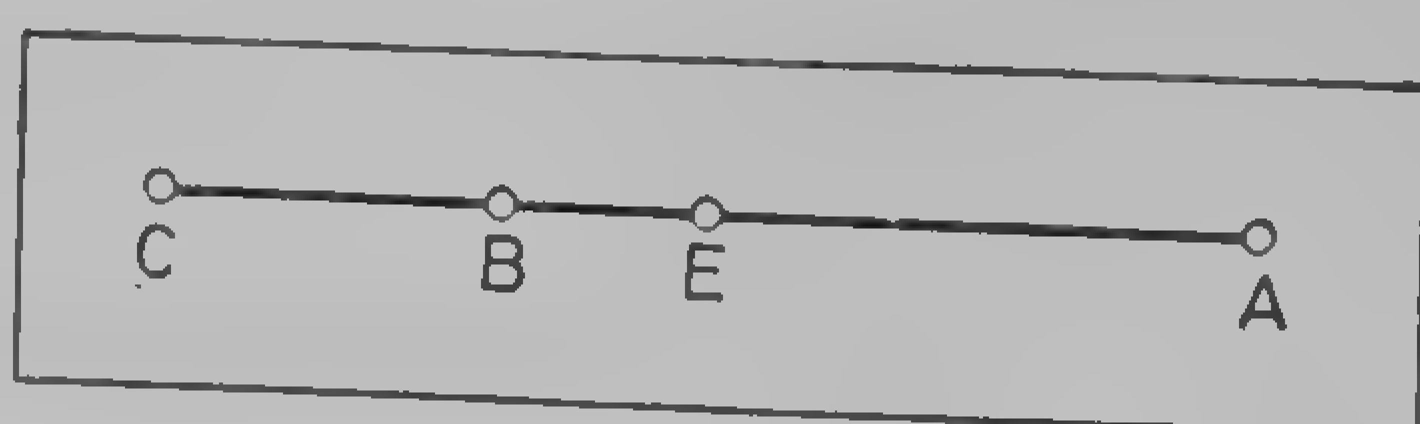
یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست‌ویکم :

(۱) ـ عل: ص۳۵ و ۳۶ ـ سوتر A: ص۵۵ و۷۴ ـ چد: ص ۱۰۲ و ۱۰۳ ـ چم: ص ۱۵۷ تا ۱۵۹.

(۲)- عنوان این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است : « معرفة وتر القوس و وتر تمامها الی نصف الدایرة المعلومة القطر اذاکان الوتران بمجموعها معلومین و بالتفصیل مجهولین لی» - دربارهٔ اصطلاح «وترتمام قوس» رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ(۲) ذیل مسئلهٔ شانزدهم.

(۳)- چنانکه درفوق دیده می‌شود استاد با افزودن کلمهٔ لی درآخر صورت مسئله حل آن را ازخود دانسته است.

(۴)- بنا به شکل (= قضیهٔ) نهم از مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» که ترجمهٔ فارسی آن چنین است :«هرگاه پاره‌خطی به قطعات متساوی و نامتساوی تقسیم شود مجموع مربعات قطعات نامتساوی مساوی است با دو برابر مربع نصف پاره خط به علاوهٔ دو برابر مربع قطعه‌ای که بین دو نقطهٔ تقسیم واقع است.»



(شکل ۸۰)

مثلا در شکل فوق نقطهٔ E وسط پاره خط AC و نقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی از آن پاره‌خط است وداریم:

$$\overline{AB}^{2} + \overline{BC}^{2} = 2\overline{AE}^{2} + 2\overline{BE}^{2}$$

(برای استدلال قضیهٔ فوق رجوع کنید به «هیث : سیزده مقاله» جلد اول صفحهٔ ۳۹۲).

(۵)- عبارت عربی این دستور و ترجمهٔ آن به‌زبان ریاضی این است:
حسابه : نضرب نصف مجموع ذانك الوترین فی نفسه :

$\left|\left(\frac{AB + BC}{2}\right)^{2}\right|$ ونلقی ما اجتمع من نصف مضروب القطرفی نفسه

و ناخذ جذر مابقی $\left[\sqrt{\frac{\overline{AB}^{2}}{2}-\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^{2}}\right]$

وان اردنا الوتر الاطول زدنا هذا الجذر علی نصف مجموع الوترین فیجتمع

الوتر الاطول $\left[\frac{AB+BC}{2}+\sqrt{\frac{\overline{AB}^{2}}{2}-\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^{2}}\right]$

وان اردنا الـوتـر الاقصر نقصنا هـذا الجذر من نصف مجموعها فیحصل

الوتر الاقصر $\left[\frac{AB+BC}{2}-\sqrt{\frac{\overline{AB}^{2}}{2}-\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^{2}}\right]$

(۶)- حل این مسئله از راه جبری این است:

اگر فرض کنیم $AB=x$ و $BC=y$ و $AC=d$ و $AB+BC=s$

داریم :

$$\begin{cases} x+y=s \\ x^{2}+y^{2}=d^{2} \end{cases}$$

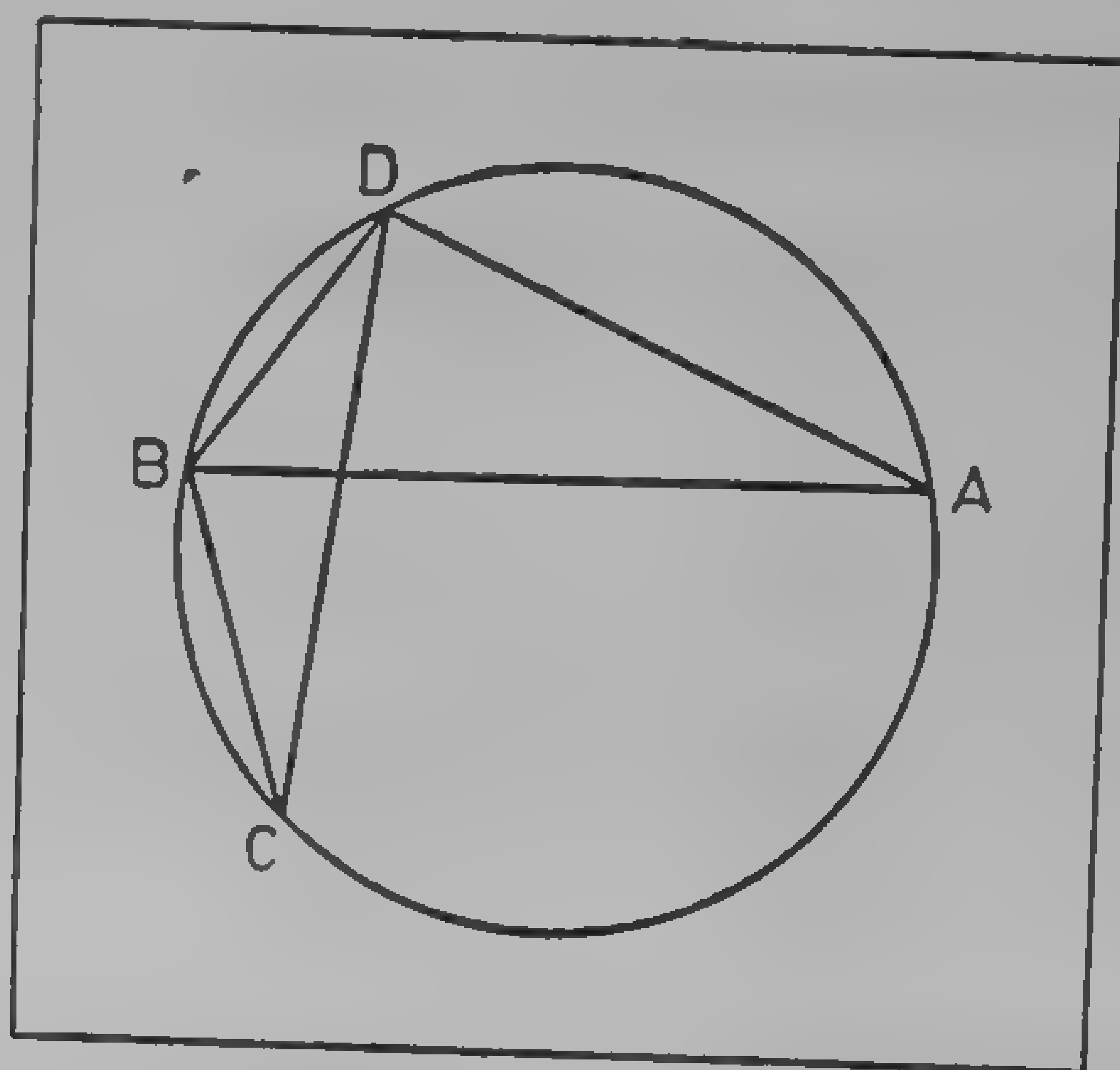
از روی این دو معادله حاصل میشود :

$$x=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{d^{2}}{2}-\frac{s^{2}}{4}} \quad \text{و} \quad y=\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{d^{2}}{2}-\frac{s^{2}}{4}}$$

که همان دستورهایی است که استاد داده است (سوتر A: ص۷۴)

مسئلهٔ بیست ودوم(۱)- محاسبهٔ وتر تفاضل دوکمان که وترهای آنها معلوم است برحسب وترمجموع آن دوکمان - و محاسبهٔ وتر مجموع دو کمان که وترهای آنها معلوم است برحسب وتر تفاضلشان (۲).

(این مسئله و مسئلهٔ بیست وسوم یکی است)



(شکل ۸۱)

راه حل از ابو نصربن عراق[۳]ـ (اولاً) فرض می‌کنیم که دووتر AD و DB معلوم باشند ووتر DC را مساوی با AD می‌سازیم و BC و AD را رسم می‌کنیم. بنابراین BC وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DB}$ است و AB وتر مجموع آن دو کمان می‌باشد.

(اکنون می‌گوییم که اولا) به فرض اینکه وتر BC یعنی وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DB}$ معلوم باشد می‌خواهیم AB یعنی وتر مجموع آن دو کمان را (بر حسب AD و DB و BC) حساب کنیم:

(نظر به قضیهٔ دوم) معلوم است که :

$$\overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2 \qquad (۱)$$

بنابراین :

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC$$

وچون (AD و BD و) BC معلوم است AB از تساوی فوق به دست می‌آید.

دستور[۴]ـ (عبارت عربی این دستور را می‌توان به صورت زیر در آورد) :

$$AB = \frac{\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2}}{BC}$$

(ثانیاً) به فرض اینکه AB یعنی وتر مجموع دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DC}$ معلوم باشد می‌خواهیم BC یعنی وتر تفاضل آن دو کمان را (بر حسب AD و DC و AB) حساب کنیم :

دستور[۵]ـ (این دستور از روی رابطهٔ (۱) فوق به دست می‌آید و عبارت عربی آن را می‌توان به‌شکل زیر ترجمه کرد):

$$BC = \frac{\overline{AD}^{2} - \overline{BD}^{2}}{AB}$$

و رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۶).

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست و دوم :

(۱)ـ عل : ص ۳۶ ـ سوتر A : ص ۵۶ و ص ۷۴ـ چد : ص۹۸ ـ چم: ص۱۵۲ .

(۲)ـ صورت این مسئله درنسخهٔ«عل» چنین است: «معرفة وترفضل مابین قوسین معلومتی‌الوتر من قبل وتر مجموعهما ووترمجموعهمامن قبل وتر تفاضلها لابی‌نصربن عراق.

اما درنسخه های چاپی صورت این‌مسئله چنین است:«وله (مقصود ابونصرعراق‌است) فی‌استخراج احد هما من‌الآخرطریق‌آخراورده فی‌الکتاب المذکور (مقصودکتاب المجسطی‌الشاهی‌است) » .

(۳)- چنانکه دریادداشت شمارهٔ (۲) دیده می‌شود استاد با افزودن «لابی‌نصربن‌عراق» درآخرصورت مسئله این راه‌حل را ازابونصربن علی‌بن عراق دانسته است. خود وی راه حل دیگری برای همین مسئله در مسئلهٔ بیست و سوم ذکر کرده است .

(۴)- عبارت عربی این دستور این است:«نضرب کل‌واحدمن‌الوترین فی‌نفسه وناخذ فضل‌مابین مایجتمع من‌کل‌واحد منهمافنقسمه‌علی وتر فضل مابین قوسیهما فیخرج‌وتر المجموع».

(۵)- عبارت عربی این دستوراین است: «نضرب کل‌واحد من‌الوترین فی نفسه و ناخذ فضل مابین المجتمعین فنقسمه علی وتـر مجموع‌قوسیهما فنخرج وتر التفاضل» .

(۶)- اگر اندازه های دوکمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ رابرحسب‌رادیان به‌ترتیب α و β نامیم‌رابطهٔ $\overline{AD}^2 = AB \times BC + BD^2$ را مـی‌توان چنین نوشت (← سوتر A ؛ص ۷۴)

$$4r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2r \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \times 2r \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 4r^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

ویا :

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

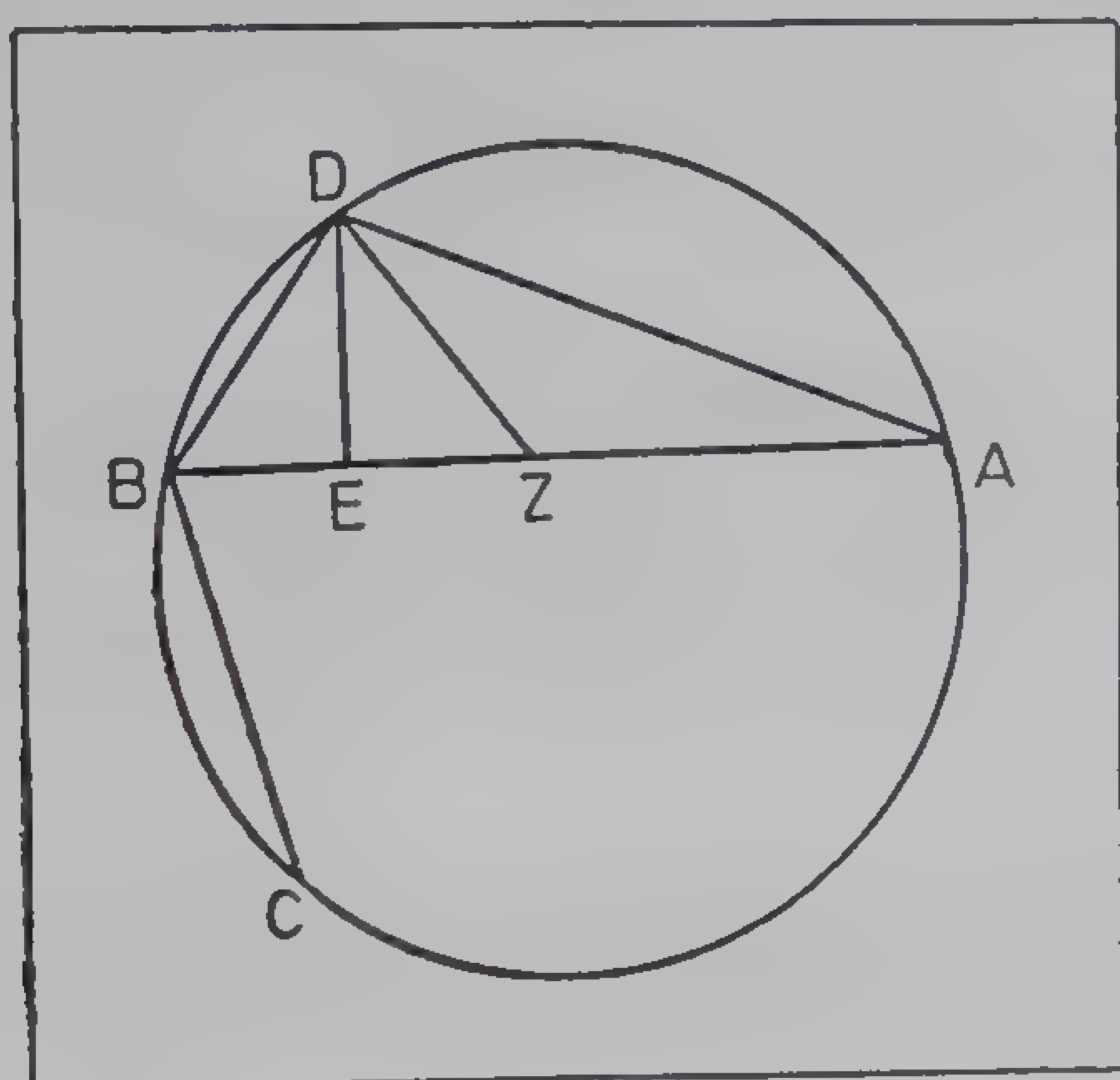
و ازآنجا دو دستور زیر به دست می‌آید:

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

و

$$\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right)=\frac{\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}-\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)}$$

مسئلهٔ بیست وسوم [۱] **-** (همان مسئلهٔ بیست ودوم است که استاد راه‌حلی برای‌آن ازخود ذکر کرده است) - **محاسبهٔ‌وترمجموع‌ووتر تفاضل(دوکمان) یکی از روی دیگری**(۲).



(شکل ۸۲)

راه حل از استاد(۳) **-** فرض می کنیم وترهای AD و DB معلوم باشند و وتر مجموع دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DB}$ یعنی وتر AB نیز معلوم باشد و می‌خواهیم وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BC}$ یعنی وترBC را حساب کنیم.

از نقطهٔ D عمود DE را برAB فرود می‌آوریم . (نظر به‌قضیهٔ مربوط به‌مربع ضلع مقابل به‌زاویهٔ حاده درمثلث) داریم:

$$\overline{AD}^{۲}=\overline{AB}^{۲}+\overline{BD}^{۲}-۲AB\times BE$$

بنابراین:

$$BE = \frac{\overline{AB}^۲ - (\overline{AD}^۲ - \overline{BD}^۲)}{۲AB}$$

(پس BE معلوم است) . اما (نظر به قضیهٔ اول) داریم :

$$BE = \frac{AB - BC}{۲}$$

بنابراین: $BC = AB - ۲BE$

(و چون AB و BE معلوم است پس BC به دست می‌آید.)

دستور ـ (عبارت عربی این دستور هم در نسخهٔ «عل» وهم در نسخه های چاپی ناقص است و افتادگی دارد[۴]. سوتر متوجه این افتادگی شده ولی آقای احمد سعیدالدامرداش در نسخهٔ چاپ مصر متوجه آن نشده است . در هرصورت دستور صحیح این است) :

$$BC = AB - \frac{\overline{AB}^۲ - (\overline{AD}^۲ - \overline{BD}^۲)}{AB}$$

رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۵) .

واگر وتر BC یعنی وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{DB}$ معلوم باشد وبخواهیم وتر AB را که وتر مجموع آن دو کمان است به دست آوریم از روی EA پاره خط EZ را مساوی با BE جدا می کنیم و D را به Z وصل می‌نماییم . واضح است که دراین صورت $DZ = DB$ (ونظر به قضیهٔ مربوط به مربع ضلع مقابل

به زاویهٔ منفرجه درمثلث) داریم :

$$\overline{AD}^{2} = \overline{DZ}^{2} + \overline{AZ}^{2} + 2AZ \times EZ$$

و چون $2EZ = BZ$ پس :

$$\overline{AD}^{2} = \overline{DZ}^{2} + \overline{AZ}^{2} + AZ \times BZ$$

و ازآنجا: $BZ = \dfrac{\overline{AD}^{2} - (\overline{DZ}^{2} + \overline{AZ}^{2})}{AZ}$ و چون $DZ = BD$

و $AZ = BC$ پس $BZ = \dfrac{\overline{AD}^{2} - (\overline{BD}^{2} + \overline{BC}^{2})}{BC}$

پس BZ معلوم است [و می‌دانیم کـه $AB = BZ + BC$ پس AB به دست می‌آید].

دستور (۶) - (عبارت عربی این دستور را می‌توان به‌صورت زیر ترجمه کرد) :

$$AB = BC + \frac{\overline{AD}^{2} - (\overline{BD}^{2} + \overline{BC}^{2})}{BC}$$

و رجوع کنید به یادداشت شمارهٔ (۷)

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست و سوم :

(۱)- عل: ص۳۶- سوتر A: ص ۵۶ و۵۷ ونیزص ۷۴ و۷۵- چد : ص۹۹ و ۱۰۰- چم : ص۱۵۳ و ۱۵۴

(۲)- صورت این مسئله درنسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة وتر المجموع ووتر التفاضل بعضها من بعض لی» - این همان مسئلهٔ بیست ودوم است که

در اینجا صورت آن مختصرتر بیان شده و استاد راه حلی برای آن از خود ذکر کرده است. در نسخه‌های چاپی در آغاز حل این مسئله از قول استاد آمده است: «قلت فی بعض المقالات التی احتجت الی هذا المعنی فیها...)

(۳)- چنانکه در یادداشت شمارهٔ (۲) ملاحظه می‌شود استاد با افزودن کلمهٔ لی به آخر صورت مسئله این راه حل را از خود دانسته‌است.

(۴)- عبارت عربی این دستور پس از تصحیح لازم چنین است: «نضرب کل واحد من الوترین فی نفسه و ننقص اقل مایجتمع من اکثرها (ونلقی المبلغ من مضروب الوتر الاطول فی نفسه) ونقسم ما یبقی علی وتر مجموع قوسیها فما خرج نلقی ضعفه من وتر المجموع فیبقی وتر التفاضل».

(جمله‌ای راکه در پرانتزها نوشته‌ام در متن عربی نیست).

(۵)- اگر این دستور را ساده کنیم همان دستوری به‌دست می‌آید که استاد از قول ابو نصر عراق در مسئلهٔ بیست ودوم ذکر کرده است یعنی

$BC = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB}$ ومعلوم نیست چرا استاد دستور ابـونصر عراق را که ساده است به صورت پیچیده‌ای کـه درمتن دیـده می‌شود درآورده است.

(۶)- عبارت عربی این دستور چنین است: « نضرب کل واحد من الوتر الاقصر و وتر التفاضل فی نفسه ونجمعها و نلقی المبلغ مـن مضروب الوتر الاطول فی نفسه ونقسم مایبقی علی وتر التفاضل فما خرج نزیده علی وتر التفاضل فیجتمع وتر مجموع قوسیهما.»

(۷)- این دستور نیز پس از ساده‌کردن به صورت

$AB = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{BC}$ درمی‌آیدکه درمسئلهٔ دوم از قول ابو نصر عراق نقل شده است ومعلوم نیست چرا استاد آن را بصورت پیچیده‌ای که در متن دیده می‌شود درآورده‌است.

مسائل بیست وچهارم وبیست وپنجم وبیست‌وششم

این سه مسئله با مسئلهٔ بیست وهفتم یکی است. استاد برای هریك ازاین مسائل راه حلی از خود ویا از ابونصرعراق ذکر کرده است. چون این راه‌حلها مفصل و دستورهایی که برای آنها داده شده پیچیده است و نتیجهٔ آنها یکی است بهترین راه حل را که استاد از خود ذکر کرده است در مسألهٔ بیست و هفتم (خواهدآمد) شرح می‌دهم - این همان راه حلی است که استاد آن را برای ذکر در «قانون مسعودی» ترجیح داده است - دراینجا فقط آوردن صورت مسائل ازروی نسخهٔ «عل» و شمارهٔ صفحاتی که این مسائل در نسخه‌های مختلف آمده اکتفا می کنم.

مسئلهٔ بیست وچهارم - «معرفة وتر المجموع و وتر التفاضل کل واحد منهما بذاته من غیر ان یحتاج احدهما الی الاخر لی».

یعنی: محاسبهٔ وتر مجموع و وتر تفاضل دو کمان (که وتر هریك ازآنها معلوم باشد) بدون آنکه در محاسبهٔ یکی احتیاج بدیگری باشد (یعنی بدون آنکه در محاسبهٔ وترمجموع به وترتفاضل احتیاج باشد وبرعکس).

استاد راه حلی ازخود برای این مسئله ذکر کرده و دستوری داده که بسیار مفصل است ومی‌توان آن را پس از ساده کردن به‌صورت زیرنوشت:

$$\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^{2}\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)}$$

رجوع کنید به ـ عل: ص۳۷ و ۳۸ ـ سوتر A: ص۵۷ و۵۸ و نیز صفحهٔ ۷۵ ـ چد: ص۹۳ و۹۴ ـ چم ص۱۴۵ و ۱۴۶ .

مسئلهٔ بیست و پنجم ـ « معرفة وتر التفاضل و وتر المجموع کل واحد منهما بذاته لابی نصر عراق فی کتابه الموسوم بالمجسطی الشاهی » .

رجوع کنید به ـ عل: ص۳۸ و ۳۹ ـ سوتر A: ص۵۷ و نیز صفحات ۷۵ تا ۷۷ (در آنجا سوتر این راه‌حل‌را نقادی کرده است) ـ چد: ص۹۶ تا ۹۸ ـ چم: ص۱۴۹ تا ۱۵۲.

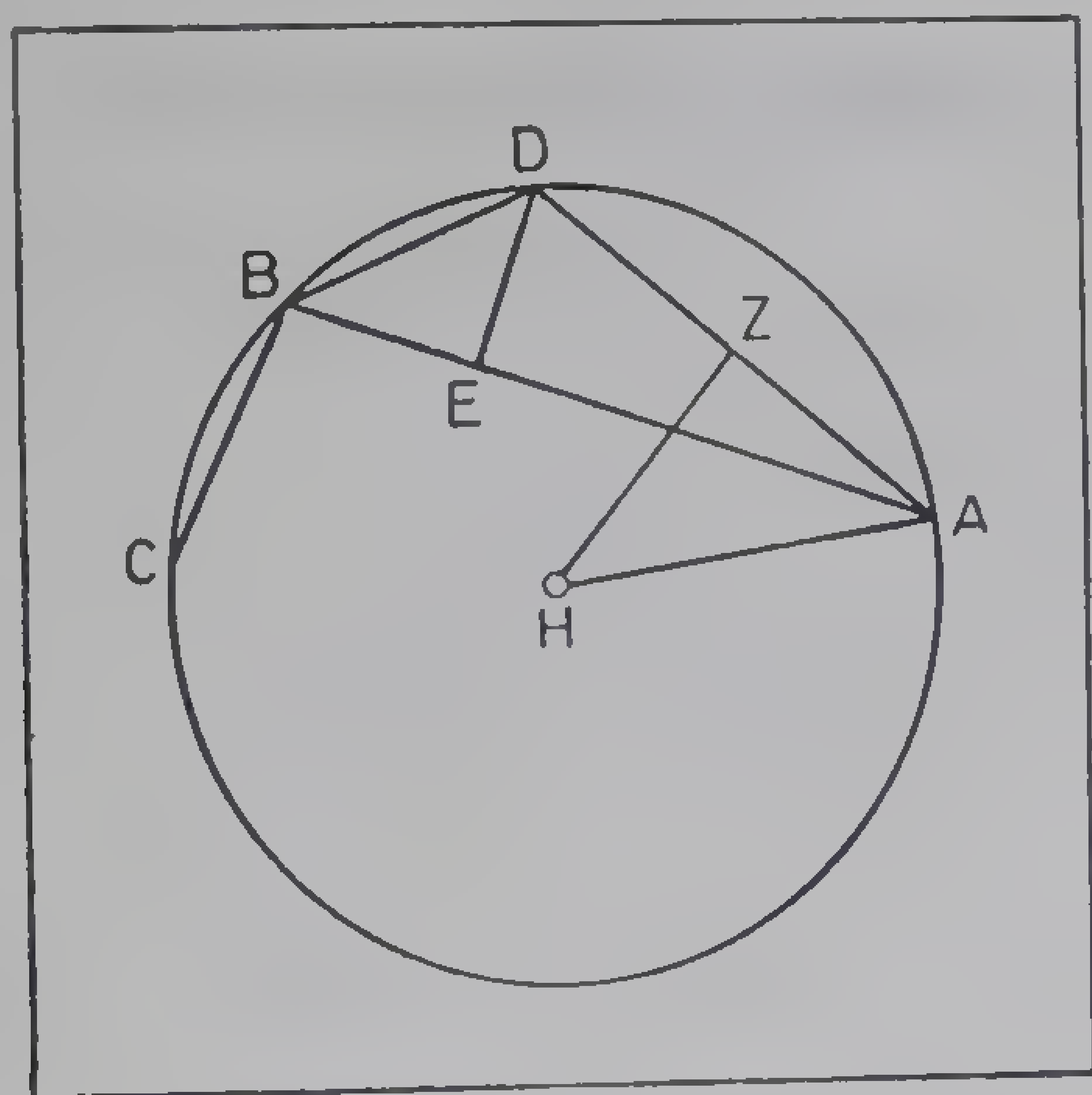
مسئلهٔ بیست وششم ـ «معرفة وتر التفاضل و وتر المجموع کل واحد منهما بذاته بطریق لی شبیه بالذی تقدم لابی نصر منصور بن علی بن عراق».

رجوع کنید به ـ عل: ص ۳۹ ـ سوتر A :ص ۶۰ و نیز صفحهٔ ۷۷ ـ چد: ص۹۴ و ۹۵ ـ چم: ص۱۴۷ و ۱۴۸ .

مسئلهٔ بیست وهفتم(۱) ـ محاسبهٔ وتر مجموع و وتر تفاضل(۲) .

(این مسئله با مسائل بیست وچهارم و بیست وپنجم و بیست وششم یکی است)

هر دو کمان از دایرهٔ به قطر معلوم کـه وترهاشان معلوم باشد می‌توان وتر مجموع و وتر تفاضلشان را حساب کرد.



(شکل۸۳)

راه حل از استاد[۲] - فرض می کنیم که وترهای دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ معلوم و قطر دایره نیز معلوم باشد. AB را که وتر مجموع دو کمان است رسم می کنیم وسپس کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی با کمان $\widehat{AD}$ جدا می کنیم. واضح است که وتر BC مساوی با وتر تفاضل دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ است. می گوییم AB و BC (برحسب AD و BD) معلوم است.

برهان - از مرکز دایره که آن را H می‌نامیم عمود HZ را بر وتر AD و از نقطهٔ D (که وسط کمان $\widehat{ADC}$ است) عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم و A را به H وصل می کنیم.

چون زاویهٔ مرکزی AHZ روبه‌روی نصف کمانی است که زاویهٔ محاطی DBE نیز روبه‌روی آن است پس این دو زاویه متساویند. بنا براین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHZ و DBE متشابهند و داریم:

$$\frac{AZ}{AH}=\frac{DE}{BD} \qquad (۱)$$

بنابراین DE معلوم است (زیرا $AZ = \frac{AD}{۲}$ و AH و BD معلوم است)

وچون $\overline{BD}^۲ = \overline{DE}^۲ + \overline{BE}^۲$ بنابراین BE نیز معلوم است.

از طرف دیگر $AD^۲ = \overline{AE}^۲ + \overline{DE}^۲$ پس AE نیز به دست می‌آید.

بنابراین AB که مساوی با AE + BE است نیز معلوم است. اما عمود DE خط شکستهٔ ABC را نصف می کند (قضیهٔ اول) و $BC = AE - BE$ پس BC نیز معلوم می‌باشد.

دستور (۴) ـ (عبارت عربی این دستور را می‌توان به‌صورت زیر بیان و ترجمه کرد).

اگر کمان بزرگتر $\widehat{AD}$ را α و کمان کوچکتر $\widehat{BD}$ را β و وتر AB را a و وتر BD را b وشعاع دایره را r بنامیم:

$$DE = \frac{ab}{۲r}$$ (این مقدار از روی تناسب (۱) به‌دست می‌آید) و

$$AB = (\alpha+\beta) \text{ وتر } = \sqrt{a^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲} + \sqrt{b^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲}$$

$$BC = (\alpha-\beta) \text{ وتر } = \sqrt{a^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲} - \sqrt{b^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲}$$

***

تبصرهٔ ۱ـ در پایان این مسئله در نسخهٔ «عل» عبارتی آمده است که چون در آن نسخه غلط کتابتی داشته **سوتر** مفهوم آن را در نیافته و در پایان ترجمهٔ آلمانی آن علامت (؟) قرار داده است. آن عبارت (پس از تصحیح لازم) این است:

« وقد استبان ان لوتر المجموع ووتر التفاضل اشتراکا فـی الاسم وذلك ان وتر **دب** وتر تفاضل مابین قوسی **اد** و **اب** و هـو بعینه اعنی **دب** وتـر مجموع قوسی **اد** و **اجب** فلذلك یسهل معرفة احدهما بالطرق التی‌سنحت وسیسنح‌منهما علم‌الآخر بذلك الطریق».

همین عبارت با انـدك اختلاف (و با غلطهای کتابتی) در نسخه هـای چاپی (چد: ص۹۴ـ چم: ص۱۴۶) در دنبال راه حل دیگری از مسئلهٔ تعیین‌وتر تفاضل دو کمان‌آمده است . وآقای‌سعید الدمرداش آن عبارت را درنسخهٔ «چم» به صورت غلط به‌چاپ رسانیده ومثل بسیاری ازمواضع دیگرچاپ‌خود نه‌به‌غلطهای‌آن توجه کرده ونه به‌مفهوم‌آن.

مفهوم عبارت مذکور با مراجعه به کتاب «قانون مسعودی» (چاپ‌حیدرآباد جلد اول صفحات ۲۸۲ و ۲۸۳) روشن می‌شود . (رجوع کنید به تبصرهٔ دوم که خواهدآمد) .

مقصود استاد این است که : چنانکه درشکل دیده می‌شود :

$$DB = (\widehat{AB} - \widehat{AD}) \text{ وتر}$$

و ازطرف دیگر : $$DB = (\widehat{ACB} + \widehat{AD}) \text{ وتر}$$

پس وتر DB را درعین‌حال هـم می‌توان وتر تفاضل دوکمان AB و AD دانست(که دریك سرمشترکند ویکی ازآنها قسمتی‌است‌ازدیگری)وهم‌وترمجموع دوکمان $\widehat{ACB}$ و $\widehat{AD}$ (که دریك سرمشترکند ونقطهٔ مشترك دیگری ندارند) . بنابراین اگر مثلا وتر مجموع را با استفاده از دستور این مسئله به دست آوردیم می‌توان وتر تفاضل را بااستفاده ازمسائل‌بیست‌ودوم وبیست‌وسوم حساب کرد .

تبصرۀ ۲- استاد در کتاب « قانون مسعودی» (جلداول صفحات ۲۸۲و۲۸۳) پس از آنکه دستور محاسبۀ وتر تفاضل و وتر مجموع دو کمان را که وترهاشان معلوم است بیان کرده است (رجوع کنید به بیرونی‌نامه : صفحات ۳۲۱ تا ۳۲۵) این دستور را اساس حل کردن همۀ مسائل دیگر مربوط به محاسبۀ وترها دانسته و نوشته است:

> « و جمیع ما ذکرنا یدور علی هذا الاخیر اعنی وتـری المجموع و التفاضل، فان وترتتمة القوس وترالی نصف الدائره‌هوفضل‌ما بین‌تلك القوس المعلومة الوترو بین نصف الدایره وتر مجموعهما ، و وترالضعف هو وتر مجموع قوسین متساویتین معلومتی الوتر، و وترالنصف هووترفضل‌مابین قوسین معلوم وتر احداهما و یساوی وترالاخری».

یعنی همه مسائل مربوط به محاسبۀ اوتار را که قبلا در کتاب «قانون مسعودی» ذکر شده می‌توان با استفاده از دستور محاسبۀ [وتر$(\alpha + \beta)$] و [وتر$(\beta - \alpha)$] حل کرد. زیرا وتر مکمل کمانی که وتر آن معلوم باشد از دستور محاسبۀ [وتر$(۱۸۰ - \alpha)$] به دست می‌آید و وتر کمان ۲α از روی دستور محاسبۀ وتر کمان $(\alpha + \alpha)$ حساب می‌شود . و وتر کمان $\frac{\alpha}{۲}$ از دستور محاسبۀ وتر کمان $(\alpha - \frac{\alpha}{۲})$ به دست می‌آید که در آن وتر کمان α معلوم و وتر کمان $\frac{\alpha}{۲}$ مجهول است .

استاد پس ازمطالب فوق در کتاب «قانون مسعودی» عباراتی نوشته که مؤید توضیحی است که در تبصرۀ۱ ذکر کردم وآن عبارات‌این است.

«ثم ان الوتر الواحد یکون لقوس هی بعینها فضل مابین قوسین یشترکان علی نقطة المبدأ وتنبعثان عنها الی جهة واحدة حتی تکون احداهما بعض الاخری وتکون ایضاً تلك القوس بعینها مجموع احدی تینك القوسین، واخری تنبعث عن نقطة المبدأ فی جهة اخری، فاذن الوتر الواحد یکون لقوس التفاضل من جهة ولقوس المجموع من اخری، فرجع لذلك الی اصل واحد».

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست‌وهفتم:

(۱)- عل: ص ۳۹و۴۰- سوتر A: ص۶۱ ونیز ص ۷۷- چد: ص۹۶ (هشت سطر اول) - چم: ص۱۴۹ .

(۲)- عنوان این مسئله درنسخهٔ «عل» چنین است: «معرفة وتر المجموع و وتر التفاضل لی فی علل زیج حبش» - عنوان کامل کتابی که استاد در اینجا به‌آن اشاره کرده این است: «تکمیل زیج حبش بالعلل و تهذیب اعماله من‌الزلل» (رجوع کنیدبه بیرونی‌نامه: ص۷۲شمارهٔ ۲/۵۲).

(۳)- چنانکه در یادداشت شمارهٔ(۲) دیده می‌شود استاد این راه حل را از خود دانسته است.

(۴)- عبارت عربی این دستور این است: نضرب الوتر الاقصر (b) فی نصف الوتر الاطول $\left(\frac{ab}{۲}\right)$ ونقسم المبلغ علی نصف القطر $\left(\frac{ab}{۲r}\right)$ فیخرج العمود $\left(DE = \frac{ab}{۲r}\right)$ ونسقط مضروب العمود فی‌نفسه من کل واحد من مضروبی الوترین کل واحد علی حده فی‌نفسه ونأخذ جذر البقیتین

$$\left[\sqrt{b^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲} \quad \text{و} \quad \sqrt{a^۲ - \left(\frac{ab}{۲r}\right)^۲} \right]$$

فان جمعاً اجتمع وتر مجموع القوسین و ان اخذ فضل ما بینهما کان مساویا لوترفضل ما بینهما».

(۵)- با استفاده ازنسبتهای مثلثاتی می‌توان این دستور را بصورت زیر درآورد:

$$۲r\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{۲}\right)=\sqrt{۴r^۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}-\frac{۴r^۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\times ۴r^۲\sin^۲\frac{\beta}{۲}}{۴r^۲}}$$

$$\pm\sqrt{۴r^۲\sin^۲\frac{\beta}{۲}-\frac{۴r^۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\times ۴r^۲\sin^۲\frac{\beta}{۲}}{۴r^۲}}$$

و یا

$$\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{۲}\right)=\sqrt{\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\left(۱-\sin^۲\frac{\beta}{۲}\right)}\pm\sqrt{\sin^۲\frac{\beta}{۲}\left(۱-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\right)}$$

$$=\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}\pm\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}$$

و این همان دستور مثلثاتی مهم و معروف است (ورجوع کنید به سوترA: ص۷۷)

مقدمهٔ مسائل بیست وهشتم وبیست ونهم

(پیش ازمسائل بیست و هشتم و بیست‌ونهم عبارت زیر درنسخهٔ «عل» آمده است):

و یمکن استخراج امهات الاوتار بهذه الخاصیة علی مثال استخراجنا لها فی علل زیج حبش وانا احکیها ها هنا فان الموضع لایق به

یعنی: « با استفاده از خاصیت خط شکستهٔ محاط در دایره می‌توان وترهای اصلی دایره را حساب کرد، همان گونه که بعضی ازآنها را در کتاب «فی علل زیج

حبش» استخراج کرده‌ایم. ودراینجاآنها را ذکرمی کنیم زیرا جای مناسب برای ذکرآنها همین‌جا است.»

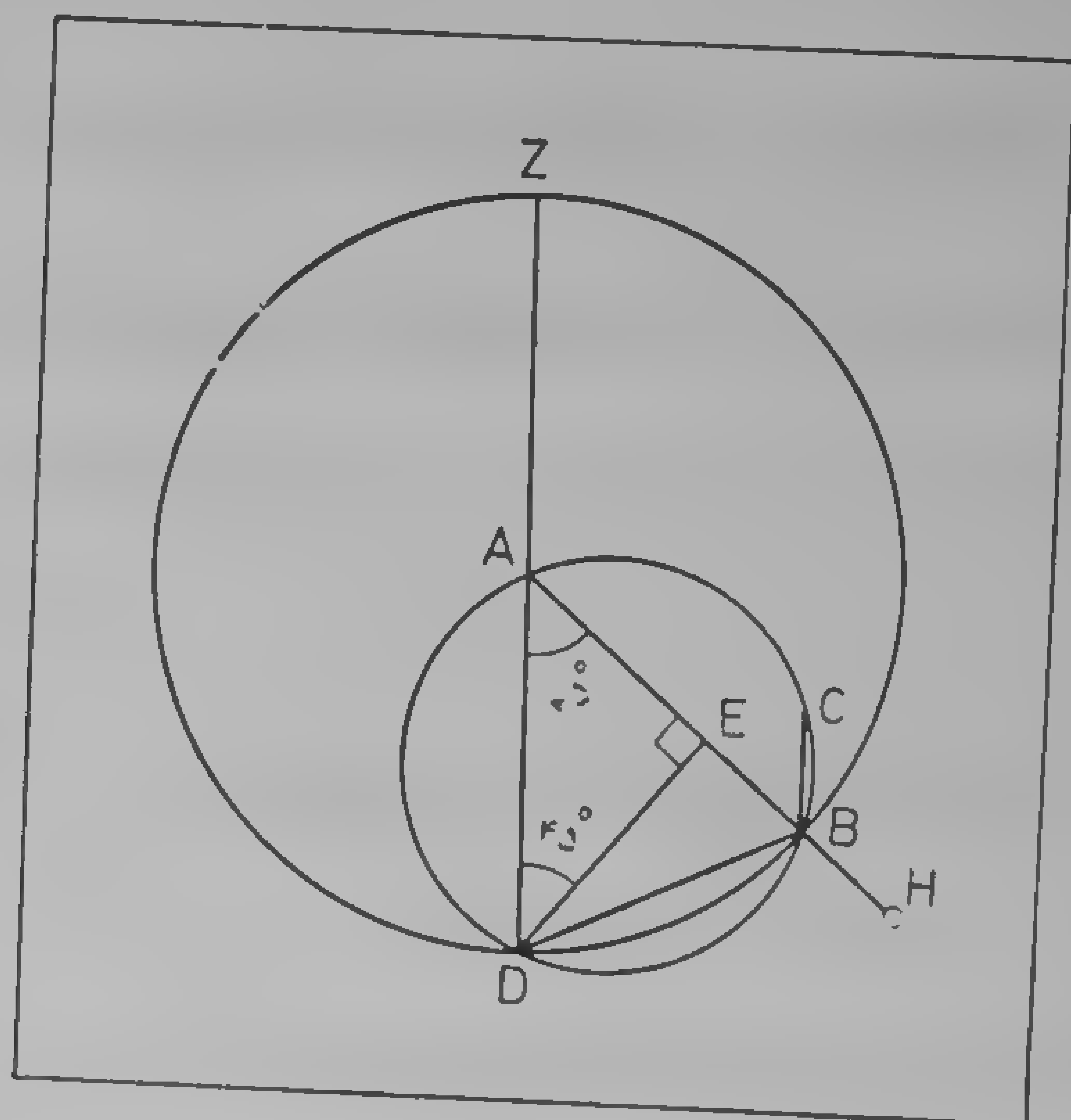
توضیحـ مقصود از وترهای اصلی دایره (امهات اوتار) وترهای روبرو به کمانهای ۱۲۰ درجه (= ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی = وترالثلث) و۹۰ درجه (وترالربع) و ۷۲ درجه (وترالخمس) و ۶۰ درجه (وترالسدس) و۴۵ درجه (وترالثمن) و۳۶درجه (وترالعشر) است که استاد دستورمحاسبهٔ همهٔ آنها را درباب اول‌مقالهٔ سوم کتاب «قانون مسعودی» (جلداول ـ صفحات ۲۷۱تا ۲۸۰) بااستدلال بیان کرده است (رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحات ۲۷۹ تا ۳۰۶) در کتاب «استخراج‌الاوتار» (نسخهٔ«عل») استاد پس ازآنکه قضایای مربوط به‌محاسبهٔ وترها راذکر کرده نوشته است که وترهای اصلی دایره را می‌توان بااستفاده ازخاصیت خط شکستهٔ محاط دردایره به دست‌آورد. وبه عنوان مثال‌محاسبهٔ وترهای روبه‌رو به کمانهای ۴۵ درجه و۳۶ درجه را از کتاب «فی‌علل‌زیج‌حبش» تألیف خود نقل کرده است.

دربارهٔ وترهای اصلی دیگر وچگونگی محاسبهٔ آنها استاد در کتاب «قانون مسعودی» توضیح‌لازم وکافی داده است (رجوع کنیدبه «بیرونی نامه» صفحهٔ ۳۲۵ شمارهٔ ۶/۳۹).

مسئلهٔ بیست و هشتم (۱)ـ محاسبهٔ وتر یك هشتم دایره(۲) (= ضلع هشت‌ضلعی منتظم محاطی).

فرض می کنیم که در دایره‌ای که قطرآن معلوم است کمان $\widehat{BD}$ یك هشتم محیط دایره باشد. وتر DB را که وتر یك‌هشتم دایره (یعنی ضلع هشت ضلعی

منتظم محاطی) است رسم مـی کنیم و مـی گوییم می‌توان DB را برحسب قطر حساب کرد .



(شکل۸۴)

راه حل (۳) ـ مرکز دایرهٔ معلوم را A مـی‌نامیم وقطرDAZ وشعاع AB را رسم کرده ازنقطهٔ D عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم ودایرهٔ محیطی‌مثلث ADB را رسم می کنیم وروی‌آن کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی با کمان $\widehat{DA}$ جدا و B را به C وصل می کنیم (۴). چون کمان $\widehat{DB}$ از دایرهٔ بزرگتر بنابه‌فرض‌یك‌هشتم دایره است پس زاویهٔ DAB مساوی با ۴۵ درجه است وچون زاویهٔ E قائمه است پس زاویهٔ ADE نیز۴۵ درجه و مثلث AED متساوی الساقین است . پس AE و DE هر کدام مساوی بـا نصف ضلع مربع محاط در دایرهٔ بزرگتر است . اکنون AB را امتداد می‌دهیم ورویِ‌آن EH را مساوی‌با AE جدا می کنیم. واضح است

که $BH = BC$ زیرا عمود DE هم خط شکستهٔ ABC را نصف می کند (بنا به قضیهٔ اول) وهم پاره خط راست ABH را وداریم:

$$\overline{AD}^{۲} = \overline{BD}^{۲} + AB \times BC = \overline{BD}^{۲} + AB \times BH$$

در این رابطه BD مجهول و AB (شعاع دایره) معلوم و BH نیز معلوم است (زیرا $BH = AH - AB$ و AH مساوی با ضلع مربع محاط در دایرهٔ (C) است) پس BD نیز معلوم است.

دستور(۵) ـ (عبارت عربی این دستور را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه و ترجمه کرد)

اگر شعاع دایره را r بنامیم ضلع مربع محاطی مساوی با $r\sqrt{۲}$ است وداریم:

$$BD = \text{وتر یک هشتم دایره} = \sqrt{r^{۲} - r(r\sqrt{۲} - r)}$$

که البته می‌توان آن را به‌صورت ساده زیر در آورد:

$$\text{ضلع هشت ضلعی منتظم محاطی} = r\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

تبصرهـ استاد در پایان این راه‌حل نوشته است: «چه این مسئله را از این راه حل کنیم وچه آن را از روی دستور محاسبهٔ وتر نصف کمانی که وتر آن معلوم است حل کنیم نتیجه یکسان است (درواقع وتر یک چهارم دایره معلوم است ومی توان وتر یک هشتم دایره را از روی آن به دست آورد.)

یادداشتهای مربوط به مسئلهٔ بیست‌وهشتم:

(۱)- عل: ص۴۰ و۴۱- سوترA : ص۶۲ ونیز ص۷۷ -چد: ص۹۰ -چم:ص۱۴۰و۱۴۱- ونیزرجوع کنید به‌صفحهٔ ۲۸۴ «بیرونی‌نامه» وصفحهٔ ۲۷۲ جلداول «قانون‌مسعودی» .

(۲)- عنوان‌عربی این‌مسئله درنسخهٔ «عل» چنین‌است : «استخراج وترالثمن فی‌الدایرة المعلومة القطر».

(۳)- همین راه‌حل را ازقول‌استاد با توضیحات لازم در«بیرونی‌نامه» (صفحهٔ۳۰۴ به‌بعد) نوشته‌ام .

(۴)- درترجمهٔعبارات بعدی‌کمی‌تغییرداده‌ام تا مطلب روشنترشود.

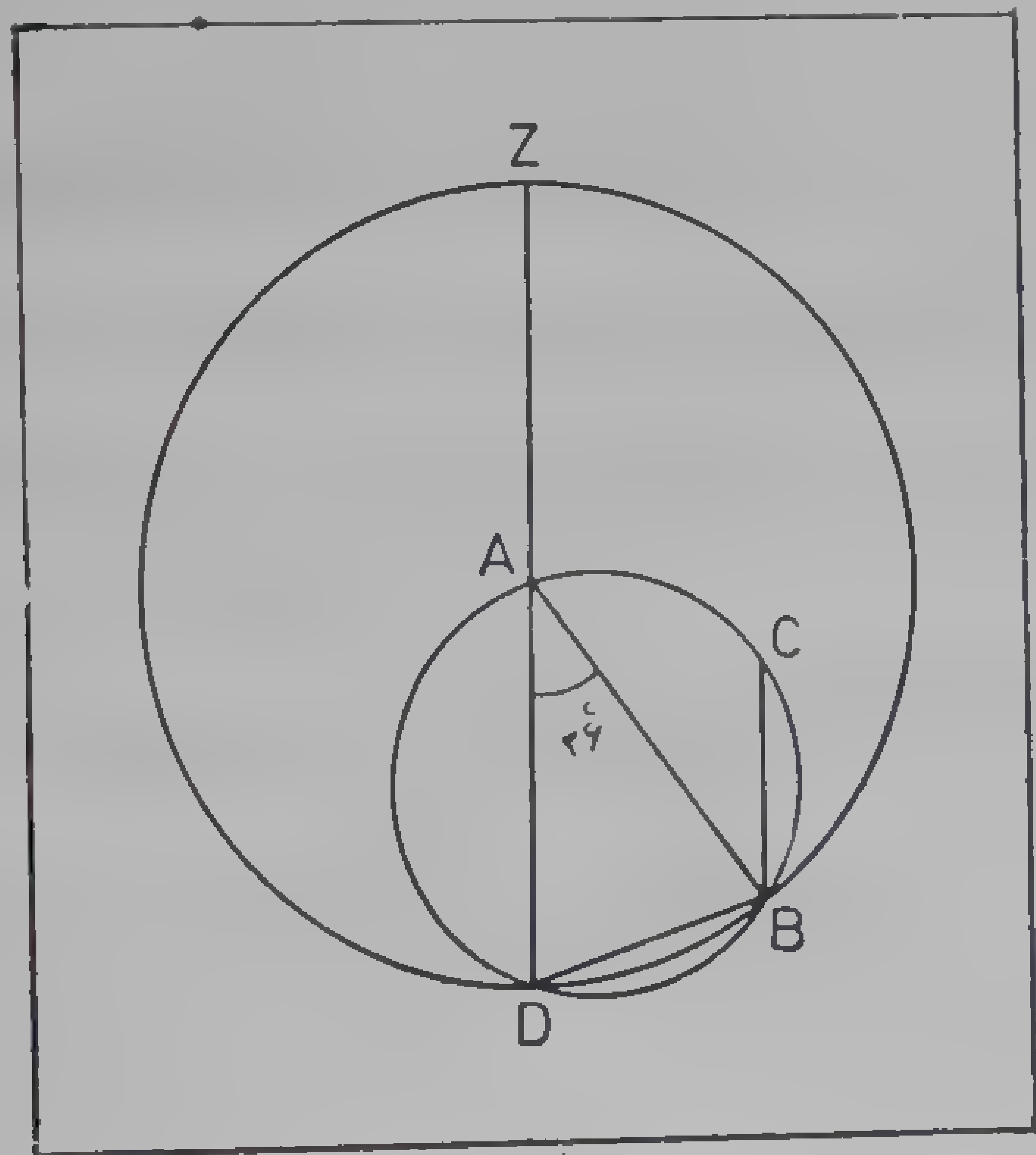
(۵)- عبارت‌عربی این دستوردرنسخهٔ«عل» چنین‌است:

(ضمناً متذکرمی‌شوم‌که هم درنسخهٔ «عل» وهم درنسخه‌های، چاپی استخراج الاوتار و هم درکتاب قانون مسعودی (ج۱ص **۲۷۲**سطرآخر) به‌جای «وبین‌وترالربع» به‌غلط نوشته شده است «وبین**ضعف** وترالربع»):

«حسابه : ان نلقی نصف القطرمن (ضعف؟) وترالربع‌ونضرب الباقی فی‌نصف القطر و نسقط المبلغ من مضروب نصف القطر فی‌نفسه و نوجد جذرالباقی فیکون وترالثمن» .

مسئلهٔ بیست و نهم (۱) **- محاسبهٔ وتر یکدهم دایره** (۲) (= ضلع ده ضلعی منتظم محاطی) .

فرض می کنیم که BD وتریکدهم دایره باشد . می گوییم BD (برحسب قطر دایره) معلوم است .



(شکل ۸۵)

راه حل (۲) - مرکز دایره را A نامیده قطر DAZ را رسم و A را به B وصل می کنیم و دایرهٔ محیطی مثلث ADB را نیز رسم کرده از روی آن کمان $\widehat{DBC}$ را مساوی با کمان $\widehat{AD}$ جدا و B را به C وصل می کنیم.

زاویهٔ DAB در دایرهٔ بزرگتر (BDZ) زاویهٔ مرکزی و روبه‌روی کمان یکدهم آن دایره (یعنی مساوی با ۳۶ درجه) است. اما همان زاویهٔ DAB در دایرهٔ کوچکتر (DAB) محاطی است پس کمان $\widehat{DB}$ از دایرهٔ کوچکتر یک پنجم آن دایره (یعنی مساوی با ۷۲ درجه) است. و چون دو پاره خط AB و AD (شعاعهای دایرهٔ بزرگتر) با هم مساوی هستند پس دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{ABC}$ (از دایرهٔ کوچکتر) هر کدام دوپنجم از دایرهٔ کوچکتر هستند. اما کمان $\widehat{DCB}$ را مساوی با کمان $\widehat{AD}$ جدا کردیم، بنابراین کمان $\widehat{DBC}$ دوپنجم دایرهٔ کوچکتر است و چون کمان DB یک پنجم دایره است بنابراین دو کمان $\widehat{DB}$ و $\widehat{BC}$ متساویند.

حال گوییم خط شکستهٔ ABC در دایـرهٔ کوچکتر محاط است و بنا به‌قضیهٔ دوم داریم:

$$AD^2 = BD^2 + AB \times BC = BD^2 + AD \times BD$$

بنابراین خط شکستهٔ ADB را می‌توان مانند پاره خط راستی دانست که در نقطهٔ D به نسبت ذات وسط وطرفین تقسیم شده است [۴]. قسمت بزرگتر آن AD شعاع دایرهٔ بزرگتر ومعلوم است وقسمت کوچکترش DB است که وتر یك دهم دایرهٔ بزرگتر میباشد . بنابراین DB معلوم است [۵].

دستور [۶] **ـ** (عبارت عربی دستوری را که استاد داده‌است می‌توان به‌صورت زیر خلاصه وترجمه کرد) : اگر شعاع دایره‌را r بنامیم:

$$BD = C_{10} = \text{وتر یکدهم دایره} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2}$$

تبصره ـ البته می‌توان دستور فوق را به‌صورت سادهٔ زیر درآورد:

$$BD = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

استاد درپایان این راه‌حل افزوده است: «واین‌مبنی برشکل یازدهم از مقالهٔ دوم کتاب اصول اقلیدس درتقسیم پـاره خط به نسبت ذات وسط وطرفین است [۷].

وچون یك پنجم دایره مساوی با دوبرابر یك دهم آن است ومی‌دانیم که‌وتر دو برابر کمانی را ، ‌وتر آن معلوم باشد می‌توان حساب کرد [۸] بنابراین وتر یك پنجم دایره (یعنی ضلع پنج‌ضلعی منتظم محاطی) نیز معلوم است .

یادداشت‌های مربوط به مسئلهٔ بیست و نهم:

(۱)- عل: ص۴۱- سوتر A: ص۶۲ و نیز ص۷۸- چد: ص۸۵ تا ۸۷- چم: ص۱۳۴ تا ۱۳۶:

(۲)-صورت این مسئله در نسخهٔ «عل» چنین است: «استخراج وتر العشر»

(۳)- خاطرنشان می‌کنم که محاسبهٔ وتریك دهم و وتریك پنجم دایره را برحسب شعاع دایره با استدلال کامل از روی کتاب «قانون مسعودی» در کتاب «بیرونی‌نامه» نوشته‌ام و بنابراین در اینجا زیاد به شرح مطالب نخواهم پرداخت (رجوع کنید به «بیرونی‌نامه» صفحات ۲۸۱ ش ۶/۱۵ و ص ۲۸۵ ش ۶/۲۰ و صفحات ۲۹۸ تا ۳۲۰)

(۴)- زیرا از رابطهٔ $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + AD \times BD$ حاصل می‌شود:

$$\frac{AD + BD}{AD} = \frac{AD}{BD}$$

یعنی پاره‌خط راست AD در نقطهٔ D به‌قسمی تقسیم شده است که قسمت بزرگتر آن یعنی AD واسطهٔ هندسی است بین همهٔ آن یعنی $AD + DB$ و قسمت کوچکترش یعنی BD. و این تعریف تقسیم پاره خط به نسبت ذات‌وسط وطرفین است.

(۵)-مقصود این است که اگر در تساوی $AD^2 = \overline{BD}^2 + AD \times BD$ مقدار AD را که شعاع دایره است r بنامیم می‌توان $x = BD$ را حساب کرد.

$$(r + x)x = r^2$$

و از آنجا:

$$x = BD = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

استاد در دستوری که داده این‌مقداررا به صورت زیرنوشته است:

$$BD = \sqrt{r^{۲} + \frac{r^{۲}}{۴}} - \frac{r}{۲}$$

(۶)- عبارت‌عربی این دستوراین‌است: «وحسابه‌ان یزاد علی‌مضروب نصف القطر فی‌نفسه ربعه و ینقص منه‌ربع (درنسخهٔ «عل» به‌غلط «نصف» نوشته‌شده‌است) القطر فیبقی وترالعشر» .

(۷) - شکل یازدهم ازمقالهٔ دوم اصول اقلیدس این است: « تقسیم خط به‌قسمی‌که سطح (یعنی‌حاصل‌ضرب) همهٔ آن‌پاره‌خط دریکی ازدوقسمت مساوی باشد با مربع قسمت باقیمانده» (رجوع کنید به «هیث: سیزده‌مقاله» جلددوم صفحات ۴۰۲ به‌بعد).

(۸)- رجوع کنید به‌مسئلهٔ هفدهم.

مسئلهٔ سی‌ام- در کتابهای «استخراج‌الاوتار» چاپی یك‌مسئلهٔ‌دیگر مربوط به‌محاسبهٔ اوتاردایره‌هست که درنسخهٔ «عل» نیست‌واستادآن‌را با استفاده ازخواص خط‌شکستهٔ محاط در دایره به‌دوطریق‌حل کرده است.

صورت‌آن مسئله این است:

«معرفة‌کل‌واحد من‌وتر ین‌لقوسین متوالیتین‌اذاکانت نسبة احدهما الی الاخرمعلومة و وتر مجموعهما معلوماً»

یعنی: محاسبهٔ هریك از دو وتر(AB و BC)متعلق به‌دو کمان متوالی ($\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$) ازدایرهٔ به‌قطرمعلوم که نسبت‌آنها $\left(\frac{AB}{BC}\right)$ معلوم و وترمجموع آن دو کمان (AC) نیزمعلوم‌باشد.

رجوع کنیدبه - چد:ص۱۰۴و۱۰۵ - چم: ص۱۵۹تا۱۶۱

بخش پنجم

پایان کتاب استخراج الاوتار

در نسخهٔ«عل» (ص۴۱) آمده است: «ومن هذه‌الاشکال بعد حصول امهات‌الاوتار فی‌الدایرة یمکن استخراج سایرها...». یعنی:

«با استفاده از این قضایا [۱] پس‌ازآنکه وترهای اصلی [۲] (= امهات اوتار) را در دایره به دست آوردیم می‌توانیم وترهای دیگر را به طریقی که در کتاب «مجسطی» به‌کار رفته است حساب کنیم به‌این‌ترتیب که ازروی دستور محاسبهٔ وتر تفاضل دو کمان [۳] می‌توان وتر تفاضل $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۵}$ دایره را به‌دست‌آورد. (یعنی با دانستن وتر کمان ۶۰ درجه ووتر کمان ۷۲ درجه می‌توان وتر ۱۲ درجه‌راحساب کرد). و از روی دستور محاسبهٔ وتر نصف یك کمان [۴] می‌توان به وتر ۳ درجه رسید. (یعنی ازروی وتر ۱۲ درجه وتر ۶ درجه وازروی‌آن وتر ۳ درجه‌را حساب کرد) و از روی دستور محاسبهٔ وتر اضعاف یك کمان [۵] و محاسبهٔ وتر مجموع

دو کمان(٦) می‌توان وترهای همهٔ کمانها را سه درجه به سه‌درجه (ابتدا از وتر سه درجه) به دست آورد.»

«اما در محاسبهٔ وتر یك درجه همه عاجز مانده‌اند و همین ناتوانی باعث آن شده است که برای استخراج آن انواع حیله‌ها را به‌کار برند تا آن را به‌تقریب، ونه‌به‌تحقیق، حساب کنند(٧)».

«پس تو، که خدایت تأیید کناد، دربارهٔ آنچه برایت (در این کتاب) گرد آورده‌ام نیك بیندیش ودر آن کاوش کن تا از این راه به‌چشمه‌های زیرکی‌وتیزبینی برسی وزنگ غفلت از عقل تو زدوده گردد وبه‌آنچه فهم عوام به‌آن نارسا است دست‌یابی ومیان تو ومن موجبات ملامت ازمیان برود...»

***

این بود ترجمهٔ تقریبی عباراتی که‌در پایان نسخهٔ«عل»آمده است. امادر پایان نسخه‌های چاپی کتاب «استخراج الاوتار» (چد: ص۲۲۶ـ چم:ص۲۸۶) قسمت اخیر مطالب فوق با دوجملهٔ اضافی به‌شرح زیر دیده می‌شود :

«وقد سلکت فی‌استخراج وترالجزء الواحد فی‌شرحی‌لعلل‌زیج حبش‌طریقاً آخر.ثم جمعت ذلك الی ما للقدماء والمحدثین‌فی کتاب عملته لحصر الطرق‌السائره فی‌استخراج اوتار الدائره.»

«فاجل‌ایدك‌الله فکرك فیما جمعته لك وتحققه حتی‌تنفتح‌به ... »

یادداشتهای مربوط به پایان کتاب «استخراج الاوتار»:

(۱)ـ مقصود مسائل شانزدهم تا بیست و هفتم است که در صفحات ۲۱۸ تا ۲۵۷ کتاب حاضر آمده است.

(۲)ـ دربارهٔ وترهای اصلی» رجوع کنید به مقدمهٔ مسائل بیست و هشتم و بیست و نهم (صفحهٔ ۲۵۷ کتاب حاضر)

(۳)ـ رجوع کنید به مسئلهٔ بیست و هفتم (صفحهٔ ۲۵۱).

(۴) ـ رجوع کنید به مسئلهٔ هجدهم (صفحهٔ ۲۲۷).

(۵) ـ رجوع کنید به مسئلهٔ هفدهم (صفحهٔ ۲۲۱).

(۶)ـ رجوع کنید به مسئلهٔ بیست و هفتم (صفحهٔ ۲۵۱).

(۸)ـ برای کسب اطلاع از محاسبهٔ تقریبی و تریك درجه رجوع کنید به «بیرونی نامه» صفحات ۳٦۰ به بعد.

فهرست منابع ومآخذ

به ترتیب الفبایی علائم اختصاری آنها

(اسامی دایرةالمعارفها ولغت‌نامه‌ها که مورداستفاده بوده دراین فهرست نیامده است)

آثارالباقیه

«الآثارالباقیه عن‌القرون‌الخالیة» تألیف ابی‌الریحان - محمدبن‌احمدالبیرونی‌الخوارزمی» چاپ ادوارد زاخاو، لایپزیك ۱۸۷۸م. با مقدمه‌ای به زبان آلمانی - درمنابع اروپایی از این‌کتاب با عنوان زیر یاد می‌کنند:

«Chronolgie Orientalischer VÖlker» Von Albiruni.
Herausgegeben von Dr. C. Eduard Sachau.
Leipzig, 1878

استخراج الاوتار (چاپ حیدرآباد)

«استخراج الاوتار فی الدائرة بخواص الخط المنحنی الواقع فیها» تألیف بیرونی. رسالهٔ اول از «رسائل البیرونی»، چاپ حیدرآباد دکن توسط جمعیة دائرة المعارف عثمانیه سال ۱۳٦۷ ه ق.

استخراج الاوتار (چاپ مصر)

«استخراج الاوتار فی الدائرة بخواص الخط المنحنی الواقع فیها» تألیف بیرونی، چاپ مصر، سال ۱۹٦۵ میلادی، مشتمل برمتن عربی وشرح ممزوج آن توسط احمد سعیدالدمرداش به زبان عربی (در ۳۱۰ صفحه).

افراد المقال فی امر الاظلال

رسالهٔ دوم از «رسائل البیرونی» چاپ حیدرآباد دکن سال ۱۳٦۷ه ق.

الفهرست

تألیف ابن‌ندیم، چاپ فلوگل: جلد اول، لایپزیك ۱۸۷۱ م

ایسیس (مجلهٔ)

ISIS : Official Quaterly Journal of the History of Science Society»

بروکلمان G ـ بروکلمان S

BROCKELMANN , Carl : «Geschichte der Arabischen Litteratur»

از چاپ دوم (۱۹۴۹ - ۱۹۴۳ م) جلدهای اول ودوم کتاب فوق با عنوانهای «بروکلمان G_1» و «بروکلمان G_2» وازمتممهـای آن باعنوانهـای «بروکلمان S_1» و «بروکلمان S_2» نام برده‌ام.

بوآلو O

BOILOT, D. J. : «L'oeuvre d'al - Biruni : essai bibliographique» (Mélange de l' Institut Dominicaine d' e'tudes orientales du Caire , vol. 2, 1955, pp. 161-25. Corrigenda et addenda, vol. 3, 1956, pp.391-396)

بیرونی‌نامه

رجوع کنید به «قربانی: بیرونی‌نامه» درهمین فهرست .

تاریخ‌الحکماء

تألیف جمال‌الدین قفطی: چاپ لیپرت، لایپزیك ۱۹۰۳ م .

تحریر اقلیدس

«تحریر اقلیدس فی‌علم‌الهندسة» توسط خواجه‌نصیرالدین طوسی، چاپ سنگی، تهران ۱۲۹۸ ه ق .

ترجمهٔ فارسی الفهرست

توسط آقای م. تجدد، تهران ۱۳٤۳ ه ش .

ترجمهٔ فارسی تاریخ‌الحکماء

«تاریخ‌الحکماء» تألیف قفطی، ترجمهٔ فارسی ازقرن یازدهم هجـری -

مقابلـه، تصحیح، حواشی و مقدمه به‌کوشش خانم دکتربهین دارائی، تهران ۱۳٤۷ ه ش .

حل‌المسائل هندسه

تألیف حسـن صفاری وابوالقاسـم قربانی در دو جلـد چـاپ تهـران (علی‌اکبرعلمی) - بارها به چاپ رسیده‌است .

رسائل ابن سنان

«رسائل‌ابن‌سنان، للعلامة ابراهیم‌بن‌سنان‌بن‌ثابت‌بن‌قرة ...» مشتمل‌برهفت رسالهٔ زیر: الاسطرلاب - التحلیل والترکیب - حرکات‌الشمس - رسم‌القطوع - المساحة - الهندسة والنجوم.

این کتاب درسال ۱۳٦۷ ه ق . مطابق با۱۹٤۸ میلادی‌در حیدرآبادکن به چاپ رسیده است.

سارتن I

SARTON, Georges: «Introduction to the History of Science.» vol. 1, 1950, vol II and III (each in 2 Parts), 1953, Baltimore

سوتر A

SUTER,H: «Das Buch der Auffindung der Sehnen in Kreise von Abul-Raihan muh. el-Biruni» (Bibliotheca Mathematica, III Folge, 11 Band, 1910-1911, pp. 11-78)

این مقاله مشتمل بر ترجمهٔ آلمانی متن کتاب «جمع الطرق السائره فی استخراج الاوتار الدائره»، تألیف بیرونی (از صفحهٔ ۱۱ تا صفحهٔ ٦٤ مقاله) وشرح وتفسیر آن است (ازصفحهٔ ٦٤ تا صفحهٔ ۷۸ مقاله) . این ترجمه وشرح بسیار استادانه انجام گرفته است .

سوتر M

SUTER, H.: «Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke». (Abhandlungen zur Geschichte der mathe matischen Wissenschaften.. , Hefte 10, Leipzig, 1900).

قانون مسعودی

«کتاب القانون المسعودی»، تألیف بیرونی، چاپ حیدرآباد دکن، ۱۹۵٤ ـ ۱۹۵٦ میلادی در سه جزء. مجموعاً دارای ۱٤۸۷ صفحه به اضافهٔ ۵۹ صفحه فهرست .

قربانی: بیرونی‌نامه

قربانی، ابوالقاسم: «بیرونی‌نامه ـ تحقیق در آثار ریاضی استاد ابوریحان بیرونی» شمارهٔ ۱۰۷ ازسلسله انتشارات انجمن آثارملی ـ تهران ۱۳۵۳ ه ش .

قربانی: دوریاضیدان ایرانی

قربانی، ابوالقاسم: «دو ریاضیدان ایرانی وشمه‌ای دربارهٔ عددهای

متحاب» از انتشارات مرکز تحقیقات علمی وتاریخی مدرسهٔ عالی دختران، ایران، تهران دیماه ۱۳٤۷ ه ش.

این کتاب مشتمل بر شرح واحوال وآثار کمال‌الدین حسن فارسی و محمدباقریزدی ومختصری دربارهٔ عددهای متحاب است.

قربانی: ریاضیدانان ایرانی

قربانی. ابوالقاسم: «ریاضیدانان ایرانی ـ ازخوارزمی تا ابن‌سینا». نشریهٔ شمارهٔ ١٤ مدرسه عالی دختران ایران، تهران ۱۳۵۰ خورشیدی ـ این کتاب مشتمل برشرح‌احوال وآثاربیست وپنج‌نفراز ریاضی‌دانان‌ایرانی است.

قربانی: مقاله «ابوالحسن بامشاد قاینی»

مشتمل برشرح‌احوال وآثار ابوالحسن قاینی. مجلهٔ یکان شمارهٔهشتم دورهٔ ششم ـ خرداد وتیر۱۳۵۱

کاژری H

CAJORI, F.: «A History of Mathematics», New York,1919.

نه مقالهٔ هندسه

تألیف حسن صفاری و ابوالقاسم قربانی شامل هندسهٔ مسطحه وهندسهٔ فضائی ومخروطات وحاملها چاپ تهران (علی‌اکبرعلمی)۱۳۳۲ ه ش.

هیث E = هیث: سیزده مقالهٔ اقلیدس

HEATH, T. L.: «The Thireen books of Euclid's Elements», 3 vols. New York, 1956

هیث H

HEATH, T. L. : «A History of Greek Mathematics», 2 vols. Oxford 1921

یوشکویچ G

JUSCHKEWITSCH, A.P.: «Geschichte der Mathematik im Mittelalter,» 1964, Leipzig.

فهرست اسامی کتابها و مقالات

فهرست نامها

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۱	فهرست مختصری از آثار و ابنیهٔ تاریخی ایران	شهریورماه ۱۳۰۴
۲	آثار ملی ایران (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	مهرماه ۱۳۰۴
۳	شاهنامه و تاریخ (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	شهریورماه ۱۳۰۵
۴	کشف دولوح تاریخی در همدان (تحقیق پرفسور هرتسفلد ــ ترجمهٔ آقای مجتبی مینوی)	اسفندماه ۱۳۰۵
۵	سه خطابه در بارهٔ آثار ملی و تاریخی ایران (از محمدعلی فروغی و هرتسفلد و هانی‌بال)	مهرماه ۱۳۰۶
۶	کشف الواح تاریخی تخت‌جمشید (نوشتهٔ پروفسور هرتسفلد)	بهمن‌ماه ۱۳۱۲
۷	کنفرانس محمدعلی فروغی راجع بفردوسی	بهمن‌ماه ۱۳۱۳
۸	تحقیق مختصر دراحوال وزندگانی فردوسی (بقلم فاطمه سیاح)	۱۳۱۳
۹	تجلیل ابوعلی‌سینا در پنجمین دورهٔ اجلاسیه یونسکو درفلورانس	اسفندماه ۱۳۲۹
۱۰	رسالهٔ جودیهٔ ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای دکترمحمود نجم‌آبادی)	اسفندماه ۱۳۳۰
۱۱	رسالهٔ‌نبض‌ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای سیدمحمد مشکوةاستاد دانشگاه)	اسفندماه ۱۳۳۰
۱۲	منطق دانشنامهٔ علائی ابن‌سینا (بتصحیح‌آقایان سید محمد مشکوة و دکتر محمد معین استادان دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۳	طبیعیات دانشنامهٔ علائی‌ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای سید محمد مشکوة)	۱۳۳۱
۱۴	ریاضیات دانشنامهٔ علائی ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای مجتبی مینوی)	۱۳۳۱
۱۵	الهیات دانشنامهٔ علائی ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای دکترمحمد معین)	۱۳۳۱
۱۶	رسالهٔ نفس‌ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای دکترموسی عمیداستاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۷	رساله‌ای درحقیقت وکیفیت سلسلهٔ موجودات (به‌تصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۸	ترجمهٔ رسالهٔ سرگذشت‌ابن‌سینا (ازآقای دکتر غلامحسین‌صدیقی)	ـــ
۱۹	معراج‌نامهٔ ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای دکتر غلامحسین صدیقی)	ـــ
۲۰	رسالهٔ‌تشریح‌اعضاء ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای دکترغلامحسین‌صدیقی)	ـــ
۲۱	رسالهٔ قراضهٔ طبیعیات منسوب بابن‌سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	ـــ
۲۲	ظفرنامه منسوب به‌ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای دکترغلامحسین‌صدیقی)	۱۳۴۸
۲۳	رسالهٔ کنوزالمعزمین ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای جلال‌الدین همایی)	۱۳۳۱
۲۴	رسالهٔ معیارالعقول ــ جرثقیل‌ابن‌سینا (بتصحیح‌آقای جلال‌الدین همایی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۵	رسالهٔ حی‌بن‌یقظان ابن‌سینا با ترجمه و شرح فارسی‌آن از یکی از معاصران ابن‌سینا (به‌تصحیح‌آقای هانری‌کربن)	۱۳۳۱
۲۶	جشن‌نامهٔ ابن‌سینا (مجلد اول ــ سرگذشت و تألیفات و اشعار و آراء ابن‌سینا) تألیف‌آقای دکتر ذبیح‌الله صفا استاد دانشگاه	۱۳۳۱

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار	
۲۷	ترجمهٔ مجلد اول جشن‌نامه بفرانسه (بوسیلهٔ آقای سعیدنفیسی)		۱۳۳۱
۲۸	ترجمهٔ اشارات و تنبیهات (بتصحیح آقای دکتراحسان یارشاطر)		۱۳۳۲
۲۹	پنج رسالهٔ فارسی و عربی‌از ابن‌سینا (بتصحیح آقای دکتراحسان یارشاطر استاد دانشگاه)		۱۳۳۲
۳۰	آثار تاریخی کلات و سرخس (تألیف آقای مهدی بامداد)	بهمن‌ماه	۱۳۳۳
۳۱	جشن‌نامهٔ ابن‌سینا مجلد دوم (حاوی نطقهای فارسی اعضای کنگرهٔ ابن‌سینا)		۱۳۳٤
۳۲	جشن‌نامهٔ ابن‌سینا مجلد سوم (کتاب‌المهرجان لابن‌سینا) حاوی نطقهای عربی اعضای کنگرهٔ ابن‌سینا		۱۳۳۵
۳۳	جشن‌نامهٔ ابن‌سینا مجلد چهارم (شامل خطابه‌های اعضای کنگرهٔ ابن‌سینا بزبانهای آلمانی و انگلیسی و فرانسوی)		۱۳۳٤
۳۴	نبردهای بزرگ نادرشاه (بقلم سرلشکر غلامحسین مقتدر)		۱۳۳۹
۳۵	جبر ومقابلهٔ خیام (به‌تصحیح وتحشیهٔ آقای دکترجلال‌مصطفوی)		۱۳۳۹
۳۶	شاهنامهٔ نادری تألیف مولانا محمدعلی فردوسی ثانی (بتصحیح و تحشیهٔ آقای احمد سهیلی خوانساری)		۱۳۳۹
۳۷	اشترنامهٔ شیخ‌فریدالدین‌عطار (بتصحیح وتحشیهٔ آقای دکتر مهدی محقق)		۱۳۳۹
۳۸	حکیم‌عمرخیام‌بعنوان‌عالم جبر تألیف‌آقای دکترغلامحسین‌مصاحب		۱۳۳۹
۳۹	نادرشاه تألیف آقای دکتر رضازادهٔ شفق استاد دانشگاه		۱۳۳۹
۴۰	درهٔ نادره تألیف میرزا مهدی‌خان (با تصحیح وتحشیهٔ آقای دکتر سید جعفر شهیدی)		۱۳٤۰
۴۱	شرح احوال ونقدو تحلیل‌آثار شیخ فریدالدین عطار تألیف‌آقای فروزانفر استاد دانشگاه		۱۳٤۰
۴۲	خسرونامه تألیف شیخ فریدالدین عطار (به‌تصحیح و اهتمام‌آقای احمد سهیلی خوانساری)		۱۳٤۰
۴۳	نامه‌های طبیب‌نادرشاه‌ترجمهٔ‌آقای دکترعلی‌اصغرحریری (باهتمام آقای حبیب یغمائی)		۱۳٤۰
۴۴	دیوان غزلیات و قصائد عطار (باهتمام و تصحیح‌آقای دکترتقی تفضلی)		۱۳٤۱
۴۵	جهانگشای نادری تألیف میرزا مهدی‌خان استرآبادی (باتصحیح و تعلیقهٔ آقای سید عبدالله انوار)		۱۳٤۱
۴۶	طربخانه (رباعیات حکیم عمر خیام‌نیشابوری) تألیف یار احمدبن حسین رشیدی تبریزی (با مقدمه و تصحیح و تحشیهٔ آقای جلال‌الدین همایی استاد دانشگاه)		۱۳٤۲

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۴۷	نادرهٔ ایام ، حکیم عمرخیام ورباعیات او بقلم آقای اسمعیل یکانی	۱۳۴۲
۴۸	اقلیم پارس (آثار باستانی و ابنیهٔ تاریخی فارس) تألیف سید محمدتقی مصطفوی	۱۳۴۳
۴۹	سفارش‌نامهٔ انجمن آثار ملی .. .	اردیبهشت ۱۳۴۴
۵۰	یادنامهٔ شادروان حسین علاء	۱۳۴۴
۵۱	ذخیرهٔ خوارزمشاهی ، تـألیف زین‌الدین ابوابراهیم اسمعیل جرجانی سنهٔ ۵۰۴ هجری (به‌اهتمام و تصحیح و تفسیر دکتر محمدحسین‌اعتمادی ــ دکترمحمد شهراد ــ دکترجلال‌مصطفوی (کتاب نخستین)	۲۵شهریور ۱۳۴۴
۵۲	دیوان صائب ، با حواشی و تصحیح بخط خوداستاد ــ مقدمه و شرح حال بخط و خامهٔ استاد امیری فیروزکوهی	۱۳۴۵
۵۳	عرائس‌الجواهر و نفایس‌الاطایب تألیف ابوالقاسم عبدالله کاشانی بسال ۷۰۰ هجری به‌کوشش‌آقای ایرج افشار	۱۳۴۵
۵۴	ری باستان(مجلد اول) مباحث جغرافیائی شهرری به‌عهدآبادی تألیف دکتر حسین کریمان	۱۳۴۵
۵۵	خیامی‌نامه (جلد اول) تألیف استاد جلال‌الدین‌همائی ..	آبان ۱۳۴۶
۵۶	فردوسی و شعر او تألیف آقای مجتبی مینوی استاد دانشگاه	آبان ۱۳۴۶
۵۷	خردنامه تألیف ونگارش ابوالفضل یوسف‌بن‌علی مستوفی بکوشش آقای عبدالعلی ادیب برومند	فروردین ۱۳۴۷
۵۸	فرهنگ واژه‌های‌فارسی در زبان عربی تألیف‌آقای سید محمدعلی امــام شوشتری	تیرماه ۱۳۴۷
۵۹	کتابشناسی فردوسی . فهرست آثار وتحقیقات دربارهٔ فردوسی و شاهنامه ، تدوین آقای ایرج افشار	مرداد ۱۳۴۷
۶۰	روزبهان‌نامه بکوشش آقای محمدتقی دانش‌پژوه	اسفند ۱۳۴۷
۶۱	کشف‌الابیات فردوسی (جلداول) بکوشش دکترمحمد دبیرسیاقی	اردیبهشت ۱۳۴۸
۶۲	زندگی و مرگ پهلوانان در شاهنامه نگارش دکتر محمد علی اسلامی ندوشن	خرداد ۱۳۴۸
۶۳	آثار باستانی‌کاشان و نطنز تألیف آقای حسن نراقی	مهر ۱۳۴۸
۶۴	بزرگان شیراز تألیف‌آقای رحمت‌الله مهراز	آبان ۱۳۴۸
۶۵	آثار شهرهای باستانی سواحل و جزایر خلیج‌فارس ودریای عمان تألیف‌آقای احمد اقتداری	آذر ۱۳۴۸
۶۶	تاریخ بناکتی بکوشش دکتر جعفرشعار .	دی ۱۳۴۸
۶۷	عهد اردشیر برگرداننده‌بفارسی سید محمد علی امام شوشتری	دی ۱۳۴۸
۶۸	یادگارهای یزد (جلداول) تألیف‌آقای ایرج‌افشار .	بهمن ۱۳۴۸

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۶۹	ری‌باستان (مجلد دوم) تألیف‌آقای دکترحسین کریمان	خرداد ۱۳۴۹
۷۰	ازآستارا تا استارباد (جلد اول بخش‌اول) آثار و بناهای‌تاریخی گیلان بیه‌پس ، تألیف دکتر منوچهر ستوده	تیر ۱۳۴۹
۷۱	یادنامهٔ فردوسی،حاوی‌مقالات وچکامه‌ها به‌مناسبت‌تجدیدآرامگاه حکیم ابوالقاسم فردوسی	آبان ۱۳۴۹
۷۲	فردوسی و شاهنامه او باهتمام آقای حبیب یغمائی	آذر ۱۳۴۹
۷۳	فیلسوف‌ری‌ـ محمدبن‌زکریای رازی‌تألیف‌آقای دکترمهدی‌محقق	آذر ۱۳۴۹
۷۴	سرزمین قزوین تألیف‌آقای دکتر پرویز ورجاوند	آذر ۱۳۴۹
۷۵	یادنامهٔ شادروان سید حسن تقی‌زاده به‌اهتمام حبیب یغمائی	بهمن ۱۳۴۹
۷۶	ذخیرهٔ خوارزمشاهی تألیف زین‌الدین ابوابراهیم‌اسمعیل‌جرجانی، سنهٔ ۵۰۴ هجری به‌اهتمام وتفسیر وتصحیح دکترجلال مصطفوی ــ (کتاب دوم)	بهمن ۱۳۴۹
۷۷	نظری اجمالی به‌تاریخ‌آذربایجان وآثار باستانی وجمعیت‌شناسی آن تألیف‌آقای دکتر محمد جواد مشکور	بهمن ۱۳۴۹
۷۸	تاریخچهٔ ساختمانهای ارگ سلطنتی تهران وراهنمای کاخ گلستان نوشتهٔ‌آقای یحیی ذکاء	فروردین ۱۳۵۰
۷۹	کشف‌الابیات شاهنامهٔ فردوسی جلد دوم ــ بکوشش دکتر محمد دبیر سیاقی	خرداد ۱۳۵۰
۸۰	آثار باستانی و تاریخی لرستان ــ جلد نخست ــ تألیف آقای حمید ایزدپناه	تیر ۱۳۵۰
۸۱	در دربار شاهنشاه ایران ــ تألیف ا . کمپفر آلمانی ــ ترجمهٔ آقای کیکاووس جهانداری	مرداد ۱۳۵۰
۸۲	نگاهی به شاهنامه ، تألیف‌آقای پروفسور فضل‌الله رضا	شهریور ۱۳۵۰
۸۳	مونس‌الاحرار فی‌دقایق‌الاشعار (جلد۲) تألیف محمدبن‌بدرجاجرمی بسال۷۴۱هجری با تحشیه وتفسیرآقای میرصالح طبیبی	شهریور ۱۳۵۰
۸۴	مقدمه‌ای برشناخت اسناد تاریخی تألیف سرهنگ دکترجهانگیر قائم مقامی	شهریور ۱۳۵۰
۸۵	فرهنگ شاهنامه تألیف دکتر رضازاده شفق	مهر ۱۳۵۰
۸۶	دانش و خرد فردوسی فراهم‌آوردهٔ دکترمحمود شفیعی	مهر ۱۳۵۰
۸۷	وقفنامهٔ ربع رشیدی (چاپ‌عکسی) از روی‌نسخهٔ مورخ به‌سال۷۰۹ قمری زیرنظرآقایان مجتبی مینوی و ایرج افشار	اسفند ۱۳۵۰
۸۸	ذیل جامع‌التواریخ رشیدی‌تألیف‌حافظ ابرو مورخ دوران‌تیموری با مقدمه و تعلیقات آقای دکتر خانبابا بیانی	اسفند ۱۳۵۰

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۸۹	از استارا تا استاراباد(مجلد دوم) آثار وبناهای تاریخی گیلان بیه‌پیش تألیف دکتر منوچهر ستوده	خرداد ۱۳۵۱
۹۰	نصیحة‌الملوك تألیف امام محمد غزالی با مقدمه وتصحیح وتحشیهٔ استاد جلال‌الدین همایی	آذرماه ۱۳۵۱
۹۱	آثار باستانی آذربایجان(جلد اول‌آثار تاریخی شهرستان تبریز) تألیف آقای عبدالعلی‌کارنگ	آذرماه ۱۳۵۱
۹۲	مجموعه انتشارات قدیم انجمن	دی‌ماه ۱۳۵۱
۹۳	مجموعهٔ مقالات فروغی دربارهٔ شاهنامه و فردوسی به‌اهتمام آقای حبیب یغمائی	بهمن‌ماه ۱۳۵۱
۹۴	داستان داستانها (داستان رستم و اسفندیار) تنظیم متن وشرح و توضیح به‌کوشش دکتر محمدعلی اسلامی ندوشن	اسفندماه ۱۳۵۱
۹۵	فردوس در تاریخ شوشتر تألیف علاءالملك حسینی شوشتری(قرن ۱۱هجری) با مقدمه و تصحیح و تعلیق‌آقای جلال محدث	خرداد ۱۳۵۲
۹۶	تاریخ تبریزتاپایان‌قرن‌نهم هجری‌تألیف دکتر محمد جواد مشکور	تیرماه ۱۳۵۲
۹۷	ذخیرهٔ خوارزمشاهی تألیف زین‌الدین‌ابوابراهیم اسماعیل جرجانی سنهٔ ۵۰٤هجری باهتمام و تفسیر و تصحیح دکتر جلال مصطفوی جلد سوم	شهریور ۱۳۵۲
۹۸	ترجمهٔ یك فصل‌ازآثارالباقیهٔ ابوریحان‌بیرونی‌بخامهٔ‌علیقلی‌میرزا اعتضادالسلطنه و ملاعلی محمد اصفهانی بکوشش آقای اکبر داناسرشت با مقدمه والحاقاتی از ایشان	آبان ۱۳۵۲
۹۹	مادها و بنیانگذاری نخستین شاهنشاهی در غرب فلات ایران تألیف آقای جلیل ضیاءپور	بهمن ۱۳۵۲
۱۰۰	سیر فرهنگ‌ایران دربریتانیا یا تاریخ‌دویست‌سالهٔ مطالعات‌ایرانی تألیف آقای دکتر ابوالقاسم طاهری	اسفند ۱۳۵۲
۱۰۱	آثار ملی اصفهان تألیف‌آقای ابوالقاسم رفیعی مهرآبادی	اسفند ۱۳۵۲
۱۰۲	سیراف (بندر طاهری) تألیف آقای غلامرضا معصومی	اسفن[illegible] ۱۳۵۲
۱۰۳	فرهنگ فارسی به پهلوی تألیف آقای دکتر بهرام فره‌وشی استاد دانشگاه تهران	فروردین ۱۳۵۳
۱۰۴	کتابشناسی کتابهای‌خطی تألیف شادروان دکترمهدی بیانی استاد فقید دانشگاه به‌کوشش‌آقای حسین محبوبی اردکانی	خرداد ۱۳۵۳
۱۰۵	تاریخ بافت قدیمی شیراز ، تألیف‌آقای‌کرامت‌الله افسر	مرداد ۱۳۵۳
۱۰۶	فرار از مدرسه ، در بارهٔ زندگی و اندیشهٔ ابوحامد غزالی ، تألیف دکتر عبدالحسین زرین‌کوب	مرداد ۱۳۵۳
۱۰۷	بیرونی‌نامه ، پژوهش و نگارش آقای ابوالقاسم قربانی	مهر ۱۳۵۳

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۱۰۸	جامع جعفری، تاریخ یزد در دوران نادری و زندیه و عصر سلطنت فتحعلی‌شاه، تألیف محمد جعفر بن محمد حسین نائینی متخلص به «طرب»، به‌کوشش آقای ایرج افشار	آبان ۱۳۵۳
۱۰۹	کتاب‌التفهیم لاوائل صناعة التنجیم، تألیف ابوریحان محمدبن احمد بیرونی خوارزمی، با تجدید نظر و مقدمهٔ تازه به خامهٔ استاد جلال‌الدین همائی	دی‌ماه ۱۳۵۳
۱۱۰	(دیار شهریاران) آثاروبناهای تاریخی خوزستان جلدنخستین بخش اول ـ تألیف آقای احمد اقتداری	خرداد ۱۳۵۴
۱۱۱	(دیارشهریاران) آثاروبناهای تاریخی خوزستان نخستین جلد بخش دوم ـ تألیف آقای احمد اقتداری	خرداد ۱۳۵۴
۱۱۲	احوال و اقوال‌شیخ ابوالحسن خرقانی بضمیمهٔ (منتخب نورالعلوم) تألیف آن عارف بزرگوار باهتمام استاد مجتبی مینوی	تیرماه ۱۳۵۴
۱۱۳	شرح احوال و آثار و دوبیتی‌های باباطاهرعریان بانضمام شرح وترجمه کلمات قصار وی منصوب به عین‌القضاه همدانی (؟) با اصل و ترجمه کتاب الفتوحات الرّبانیّه‌فی مزج‌الاشارات‌الهمدانیه) به شرح وتفسیرمحمدبن‌ابراهیم مشهوربه خطیب وزیری به‌کوشش دکتر جواد مقصود	شهریور ۱۳۵۴
۱۱۴	کتاب «الغارات» تألیف ابواسحق ابراهیم بن محمد بن سعید ثقفی کوفی اصفهانی باهتمام و تصحیح استاد میرجلال‌الدین محدّث (بخش نخست)	شهریور ۱۳۵۴
۱۱۵	کتاب «الغارات» به شرح مذکور درشمارهٔ۱۱۴ (بخش دوم)	شهریور ۱۳۵۴
۱۱۶	یادگارهای یزد (جلد دوم) تألیف آقای ایرج افشار	شهریور ۱۳۵۴
۱۱۷	تاریخ روابط بازرگانی‌وسیاسی‌ایران و انگلیس‌ازدوران فرمانروائی مغولان‌تاپایان عهد قاجاریه‌تألیف‌وتدوین آقای‌دکترابوالقاسم طاهری	مهرماه ۱۳۵۴
۱۱۸	از آستارا تا استارباد « مجلد ششم » شامل اسناد تاریخی گرگان بکوشش‌آقای دکترمسیح ذبیحی ودکترمنوچهرستوده (بخش‌نخست)	مهرماه ۱۳۵۴

شماره	نام کتاب	تاریخ انتشار
۱۱۹	از آستارا تا استارباد «مجلد هفتم» بشرح مذکور در شمارهٔ ۱۱۸ (جلد دوم)	آذرماه ۱۳۵۴
۱۲۰	سفرنامه حکیم ناصرخسرو به کوشش و تصحیح دکتر محمد دبیرسیاقی	بهمن‌ماه ۱۳۵۴
۱۲۱	آثار باستانی خراسان جلد اول شامل آثار و ابنیهٔ تاریخی جام و نیشابور و سبزوار ـ اثر آقای عبدالحمید مولوی	اردیبهشت ۲۵۳۵ شاهنشاهی(۱۳۵۵ خورشیدی)
۱۲۲	تاریخ باستانی ایران بر پایهٔ باستانشناسی تألیف پرفسور هرتسفلد ترجمهٔ علی‌اصغر حکمت استاد ممتاز دانشگاه تهران	اردیبهشت ۲۵۳۵ شاهنشاهی(۱۳۵۵ خورشیدی)
۱۲۳	آثار باستانی و تاریخی لرستان ـ جلد دوم ـ تألیف آقای ایزدپناه	خرداد ۲۵۳۵ شاهنشاهی(۱۳۵۵ خورشیدی)